

فهرست مطالب :

در صفحه	جلد تمارین صفحه	در صفحه	جلد تمارین
۲۵	صفحه ۷۰	۴	صفحه ۱۴
۲۶	صفحه ۷۶	۹	صفحه ۲۶
۲۷	صفحه ۸۲	۱۰	صفحه ۳۰
۲۹	صفحه ۹۲	۱۲	صفحه ۳۳
۳۲	صفحه ۱۰۱	۱۳	صفحه ۴۴
۳۳	صفحه ۱۰۹	۱۵	صفحه ۵۶
۴۳	صفحه ۱۲۰	۲۰	صفحه ۶۱
		۲۲	صفحه ۶۶

$$p(1) : 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} \Rightarrow 1 = \frac{2 \times 3}{6} \Rightarrow 1 = 1 \quad \checkmark \quad (\text{الف})$$

$$p(k) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad \text{فرض}$$

$$p(k+1) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \quad \text{مکمل}$$

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2) + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

(اثبات)

$$\frac{(k+1)}{6} (2k^2 + k + 6k + 6) = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$p(1) : 2 = 2(1)^2 \Rightarrow 2 = 2 \quad \checkmark \quad (\text{ب})$$

$$p(k) : 2 + 6 + 10 + \dots + (4k-2) = 2k^2 \quad \text{فرض}$$

$$p(k+1) : 2 + 6 + 10 + \dots + (4k-2) + (4k+2) = 2(k+1)^2 \quad \text{مکمل}$$

$$(2 + 6 + 10 + \dots + (4k-2)) + (4k+2) = 2k^2 + 4k + 2 = 2(k^2 + 2k + 1) = 2(k+1)^2 \quad (\text{اثبات})$$

$$p(1) : 1 = 1^2 \Rightarrow 1 = 1 \quad \checkmark \quad (\text{پ})$$

$$p(k) : 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2 \quad \text{فرض}$$

$$p(k+1) : 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2 \quad \text{مکمل}$$

$$(1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1)) + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2 \quad (\text{اثبات})$$

$$p(1) : 1 < \frac{1}{1} (2+1)^2 \Rightarrow 1 < \frac{9}{1} \quad \checkmark \quad (\text{ت})$$

$$p(k) : 1 + 2 + 3 + \dots + k < \frac{1}{1} (2k+1)^2 \quad \text{فرض}$$

$$p(k+1) : 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) < \frac{1}{1} (2k+3)^2 \quad \text{مکمل}$$

$$p(k) \Rightarrow 1+2+3+\dots+k+(k+1) < \frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1), \quad (\text{اثبات})$$

$$\frac{1}{8}(2k+1)^2 + k+1 \leq \frac{1}{8}(2k+3)^2, \quad \text{حال باید ثابت کرد}$$

$$(2k+1)^2 + 8(k+1) \leq (2k+3)^2 \Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 + 8k + 8 \leq 4k^2 + 12k + 9 \Rightarrow 9 \leq 9$$

که عبارتی همواره صریح است.

$$p(1): 1 \times 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} \Rightarrow 2 = \frac{2 \times 3}{3} \Rightarrow 2 = 2 \quad \checkmark$$

(ث)

$$\text{فرض } p(k): 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3},$$

$$\text{حکم } p(k+1): 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$(1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(k+1)) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) =$$

(اثبات)

$$(k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$p(1): 1+r = \frac{1-r^2}{1-r} = \frac{(1+r)(1-r)}{1-r} = 1+r, \quad (r \neq 1) \quad \checkmark$$

- ۲

$$\text{فرض } p(k): 1+r+r^2+\dots+r^k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r},$$

$$\text{حکم } p(k+1): 1+r+r^2+\dots+r^k+r^{k+1} = \frac{1-r^{k+2}}{1-r}$$

$$(1+r+r^2+\dots+r^k) + r^{k+1} = \frac{1-r^{k+1}}{1-r} + r^{k+1}$$

(اثبات)

$$= \frac{1-r^{k+1} + r^{k+1} - r^{k+2}}{1-r} = \frac{1-r^{k+2}}{1-r}$$

۳- الف) $2^1 > 1^2 \times, 2^2 > 2^2 \times, 2^3 > 3^2 \times, 2^4 > 4^2 \times, 2^5 > 5^2 \times, 2^6 > 6^2 \Rightarrow m=5$

✓ $p(5): 2^5 > 5^2 \Rightarrow 32 > 25$, $p(k): 2^k > k^2$, $p(k+1): 2^{k+1} > (k+1)^2$
 (اثبات) $2^k > k^2 \Rightarrow 2 \times 2^k = 2^{k+1} > 2k^2 \Rightarrow 2k^2 \geq (k+1)^2$

کافی است ثابت کنیم $2k^2 \geq (k+1)^2$

$2k^2 \geq k^2 + 2k + 1 \Rightarrow k^2 - 2k - 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq 1 + \sqrt{2}$ or $k \leq 1 - \sqrt{2}$

چون $k \geq 5 > 1 + \sqrt{2}$ همواره برقرار است

ب) $2^1 < 1! \times, 2^2 < 2! \times, 2^3 < 3! \times, 2^4 < 4! \times, 2^5 < 5! \Rightarrow m=4$

$p(4): 2^4 < 4! \Rightarrow 16 < 24$ ✓ $\Rightarrow n \geq 4$

فرض $p(k): 2^k < k!$

مکمل $p(k+1): 2^{k+1} < (k+1)!$

کافیست ثابت کنیم $2k! < (k+1)!$ یعنی $2^k < k! \Rightarrow 2 \times 2^k < 2 \times k! \Rightarrow 2^{k+1} < 2k!$ (اثبات)

که چون $k \geq 4$ همواره صیح است $2k! < (k+1)k! \Rightarrow 2 < k+1 \Rightarrow k > 1$

پ) $1 < \frac{1}{2} \times, 1 + \frac{1}{3} < \frac{2}{2} \times, 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} < \frac{3}{2}, 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} < \frac{4}{2} \Rightarrow m=3$ ✓

فرض $p(k): 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k - 1} < \frac{k}{2}$

مکمل $p(k+1): 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^{k+1} - 1} < \frac{k+1}{2}$

(اثبات) $p(k) \Rightarrow 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^{k+1} - 1} < \frac{k}{2} + \frac{1}{2^{k+1} - 1}$

کافی است ثابت کنیم $\frac{k}{2} + \frac{1}{2^{k+1} - 1} \leq \frac{k+1}{2}$

$$\frac{k}{2} + \frac{1}{2^{k+1}-1} \leq \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{k+1}-1 \geq 2 \Rightarrow 2^{k+1} \geq 3$$

که چون $k \geq 3$ صحیح است.

- ۴

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$p(1): \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\text{فرض } p(k): \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

$$\text{حکم } p(k+1): \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} \right) + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ & \text{(اثبات)} \\ & = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

$$P(3): \text{تعداد قطرهای مثلث} = \frac{3(3-3)}{2} = 0 \quad \checkmark$$

(۵- الف)

$$\text{فرض } P(k): \text{تعداد قطرهای } k \text{ ضلعی} = \frac{k(k-3)}{2}$$

$$\text{حکم } P(k+1): \text{تعداد قطرهای } k+1 \text{ ضلعی} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

$$\begin{aligned} & \text{(اثبات)} \quad \text{با اضافه کردن یک ضلع به } k \text{ ضلعی تعداد قطرهای آن } k-1 \text{ واحد افزوده می شود پس} \\ & \text{تعداد قطرهای } k+1 \text{ ضلعی} = \text{تعداد قطرهای } k \text{ ضلعی} + k-1 = \frac{k(k-3)}{2} + k-1 \end{aligned}$$

$$= \frac{k^2-3k+2k-2}{2} = \frac{k^2-k-2}{2} = \frac{(k-2)(k+1)}{2}$$

(ب)

$$P(3): \text{مجموع زوایای داخلی مثلث} = (2(3) - 4) \times 90 = 2 \times 90 = 180. \checkmark$$

$$\text{فرض } P(k): \text{مجموع زوایای } k \text{ ضلعی} = (2k - 4) \times 90.$$

$$\text{حکم } P(k+1): \text{مجموع زوایای } k+1 \text{ ضلعی} = (2(k+1) - 4) \times 90 = (2k - 2) \times 90.$$

با اضافه کردن یک ضلع به k ضلعی به مجموع زوایای آن به اندازه یک مثلث یعنی 2×90 اضافه می شود

$$\text{مجموع زوایای } k+1 \text{ ضلعی} = (2k - 4) \times 90 + 2 \times 90 = (2k - 4 + 2) \times 90 = (2k - 2) \times 90.$$

-۶

$$P(1): 1^1 - 1 = 1 - 1 = 0 \checkmark$$

$$\text{فرض } P(k): 1^k - 1 = 0$$

$$\text{حکم } P(k+1): 1^{k+1} - 1 = 0'$$

$$\text{اثبات } 1^k - 1 = 0 \Rightarrow 1^k = 0 + 1, \quad 1^{k+1} - 1 = 1^k(1) - 1 = (0 + 1)1 - 1 = 0 + 1 - 1 = 0 = 0'.$$

-۷

$$P(1): (1+a)^1 \geq 1+1(a) \Rightarrow 1+a \geq 1+a \checkmark$$

$$\text{فرض } P(k): (1+a)^k \geq 1+ka$$

$$\text{حکم } P(k+1): (1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$$

$$\text{اثبات } (1+a)^k \geq 1+ka \Rightarrow (1+a)^{k+1} \geq (1+a)(1+ka)$$

کافیست ثابت کنیم $((1+a)(1+ka) \geq 1+(k+1)a$

$$1+ka+a+ka^2 \geq 1+ka+a \Rightarrow ka^2 \geq 0 \Rightarrow (a^2 \geq 0, k \in \mathbb{N}) \text{ که همواره صحیح است.}$$

-۸

$$P(1): |x_1| \leq |x_1| \checkmark$$

$$\text{فرض } P(k): |x_1 + x_2 + \dots + x_k| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k|$$

$$\text{حکم } P(k+1): |x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| + |x_{k+1}|$$

$$\text{اثبات } |x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1}| = |(x_1 + x_2 + \dots + x_k) + x_{k+1}| \leq |x_1 + x_2 + \dots + x_k| + |x_{k+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| + |x_{k+1}|$$

۱- الف) زمین مرطوب است ب) l_1 و l_2 همدیگر را قطع نمی کنند

۲- الف) صحیح: به علت کلمه «تمام» ب) غلط: کلمه «بعضی» پ) صحیح

۳- $x = 2k$, $y = 2k' \Rightarrow x + y = 2k + 2k' = 2(k + k') = 2k'' \Rightarrow x + y$ زوج

۴- ابراهیم - احمد - علی - داوود - کامران

۵- الف) صحیح ب) غلط $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$ پ) صحیح

ت) غلط، مثلث با زاویه منفرجه ث) غلط ج) صحیح

۶- $?^2 + 1^2 + 2^2 = 7$ ، عدد ۷ را نمی توان به صورت مجموع مربعات سه عدد طبیعی نوشت.

۷- الف) غلط $\sqrt{2} \in Q^c$, $0 \in Q$, $\sqrt{2} + 0 = \sqrt{2} \notin Q$

ب) صحیح $x, y \in Q \Rightarrow x + y = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + nm'}{nn'} \in Q$

۸- الف) صحیح $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$

ب) غلط $0^2 = 0$ پ) غلط مانند زوایای مساوی در مثلث متساوی الساقین

ت) غلط مانند $1/5 > 1$ ولی $1/5 > 2$ نیست.

ث) صحیح $x > 2, 2 > 1 \Rightarrow x > 2 > 1 \Rightarrow x > 1$

ج) صحیح $(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

چ) صحیح $ab = 0, a \neq 0 \Rightarrow \frac{ab}{a} = \frac{0}{a} \Rightarrow b = \frac{0}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$

۱- خلف) اگر n فرد نباشد بنابراین زوج است $n^2 \Rightarrow 2k' \Rightarrow 2(2k^2) = 4k^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k \Rightarrow n = 2k$ که با زوج بودن n^2 خلاف فرض است.

۲- خلف) اگر n مضرب ۳ نباشد پس

$$n = 3k \pm 1 \Rightarrow n^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1 \Rightarrow n = 3k' + 1 \Rightarrow$$
 یعنی n^2 مضرب ۳ نیست که خلاف فرض است.

۳- خلف) اگر n مضرب ۱۰ نباشد پس

$$n = 10k \pm r \quad (1 \leq r \leq 9) \Rightarrow n^2 = 100k^2 \pm 20kr + r^2 \Rightarrow n^2 = 10k' + r^2$$
 ولی r^2 اگر $1 \leq r \leq 9$ هیچگاه مضرب ۱۰ نمی شود پس یعنی n^2 مضرب ۱۰ نیست که خلاف فرض است.

۴- اگر از یک نقطه دو خط عمود بر یک خط بتوان رسم کرد، در اینصورت مثلثی با دو زاویه قائمه وجود دارد که غیر ممکن است. (تناقض با مجموع زوایای مثلث ۱۸۰ درجه است)

۵- اگر $\sqrt{3}$ گویا باشد، به صورت کسری می نویسیم که صورت و مخرج عامل مشترک نداشته باشند

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n} \Rightarrow 3 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 3n^2 \Rightarrow m^2 \text{ مضرب } 3 \Rightarrow m \text{ مضرب } 3$$

$$m = 3k \Rightarrow m^2 = 9k^2 = 3n^2 \Rightarrow n^2 = 3k^2 \Rightarrow n \text{ مضرب } 3$$

که خلاف فرض آن است که m, n نسبت به هم اولند.

۶- اگر $d \parallel d''$ نباشد پس d, d'' هم را قطع می کنند یعنی از محل قطع آنها دو خط موازی d', d'' رسم شده است که خلاف فرض است (اصل توازی)

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} \in Q \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} = \frac{m}{n} \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{2} - \frac{m}{n} \quad -۷ \quad \text{اگر } \sqrt{2} - \sqrt{3} \text{ گویا باشد،}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3})^2 = \left(\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = 2 + \frac{m^2}{n^2} - \frac{2m}{n} \sqrt{2} \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} - 1 = \frac{2m}{n} \sqrt{2} \Rightarrow \frac{m^2 - n^2}{n^2} = \frac{2m}{n} \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{m^2 - n^2}{2mn} \in Q$$

یعنی $\sqrt{2}$ گویا است که خلاف فرض کنگ بودن $\sqrt{2}$ است.

۸- (خلف) اگر $x + y$ گویا باشد پس چون x گویا است، بنا براین $x + y - x = y$ گویا است. یعنی y گویا است که خلاف فرض است.

۹- (خلف) اگر N اول نباشد و همچنین تمام عامل های اول آن کوچکتر یا مساوی P باشد، $N = p_i \times k$ از طرفی p_i یکی از اعداد اول $2, 3, 5, 7, \dots, P$ می باشد پس $N = p_i \times k' + 1$ بنابراین

$$N = p_i \times k' + 1 \Rightarrow p_i \times k = p_i \times k' + 1 \Rightarrow p_i(k - k') = 1$$

ولی معادله آخر جواب ندارد،

چون p_i عدد اول است و حاصل ضرب آن در عددی صحیح دیگر هیچ گاه ۱ نمی شود.

نکته) اگر حکم دو قسمتی بوده و بین قسمتها ترکیب (یا) باشد،

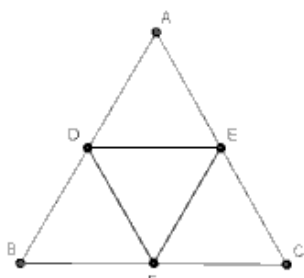
نوعی از اثبات مستقیم وجود دارد که میتوان به کمک فرض و نقیض یکی از قسمت های حکم، قسمت دیگر حکم را اثبات کرد.

$$P \Rightarrow (Q \vee R) \equiv (P \wedge \sim Q) \Rightarrow R \equiv (P \wedge \sim R) \Rightarrow Q \quad \text{به عبارت ریاضی}$$

۱- ۱۳ نفر نقش ۱۳ کبوتر و ۱۲ ماه نقش ۱۲ لانه را دارند. طبق اصل کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند یعنی حداقل دو نفر در یک ماه سال متولد شده اند.

۲- مردم شهر کبوتر و تعداد ممکن موها لانه اند و چون $300002 < 300001$ طبق اصل کبوتری حداقل دو نفر دارای تعداد موی مساوی اند.

۳- وسط های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا چهار مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $\frac{1}{2}$ حاصل شود.



۵ نقطه کبوترها و مثلثهای متساوی الاضلاع ۴ لانه اند

پس طبق اصل کبوتری حداقل ۲ نقطه

داخل یک مثلث اند که حداکثر طول فاصله ی

آنها برابر بزرگترین ضلع مثلث یعنی $\frac{1}{2}$ است.

۴- مجموعه های $\{5\}, \{4,6\}, \{3,7\}, \{2,8\}, \{1,9\}$ ، ۵ لانه و ۶ عدد انتخابی کبوتر اند. بنابراین طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ عدد داخل یک لانه اند، که برای مجموعه $\{5\}$ ممکن نیست و برای سایر مجموعه ها مجموع اعداد آنها برابر ۱۰ است.

۵- برهان خلف: اگر تمام n لانه، کمتر از دو کبوتر داشته باشند پس هر یک حداکثر یک کبوتر دارند بنابراین $m \leq n$ که خلاف فرض است (فرض $m > n$).

۱- الف) $\{x \in R \mid x > 0\}$ ب) $\{x \in Z \mid x^2 \leq 25\}$ پ) $\{x \in R \mid -2 < x < 2\}$

۲- الف) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ب) $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$ پ) $C = \{\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}\}$

ت) $D = \{-1\}$ ث) $E = \emptyset$

۳- الف) $A = \{n^2 \mid n \in N\}$ ب) $B = \{2n \mid n \in N\}$

پ) $C = \{\frac{n-1}{n} \mid n \in N\}$ ت) $D = \{x \in R \mid x^2 - 2x - 2 = 0\}$

۴- جواب هر دو مجموعه $\{ب، ی، ا، ن\}$ است.

۵- $\{a\} = \{c\} \Rightarrow a = c$, $\{a, b\} = \{c, d\} \Rightarrow b = d$

۶- الف) $A \subseteq \emptyset, \emptyset \subseteq A \Rightarrow A = \emptyset$

ب) $U \subseteq A, A \subseteq U \Rightarrow A = U$

۷- $\emptyset, \{1\}, \{0\}, \{-1\}, \{1, 0\}, \{1, -1\}, \{0, -1\}, \{1, 0, -1\}$

۸- $\emptyset, \{3\}, \{\{1, 4\}\}, \{3, \{1, 4\}\}$

۹- الف) غلط ب) صحیح پ) صحیح ث) صحیح

۱۰- $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1, -1\}$, $C = \{0, 1, 2\}$, $D = \{-1, 0, 1\}$, $E = \{0, 1, 2\}$
 $\Rightarrow A = B = D$, $C = E$

$$A = \{2, 6\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, D = \{6\} \Rightarrow D \subseteq A \subseteq B \subseteq C \quad -11$$

-۱۲ الف) غلط ب) غلط پ) صحیح ت) صحیح ث) غلط

$$-13 \quad \text{الف) } B = \{A\} \quad C = \{B\} \quad \text{ب) } C = \{A, B\}, B = \{A\} \quad \text{پ) } A = \emptyset, B = \{\emptyset\}$$

تذکره ۱: سوال ۳ ت معادله را چنین ساقطیم

$$\begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow x - (1 - \sqrt{3}) = 0 \\ \vee \\ x = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow x - (1 + \sqrt{3}) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x - 1 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

تذکره ۲: در صورتی $a \in A$ که a دقیقاً در مجموعه A مشاهده گردد.

در صورتی $B \subseteq A$ که تمام عضوهای داخل B در مجموعه A مشاهده گردند.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}, A \cap B = \{1, 2\}, A - B = \{3, \{1, 2, 3\}\}, B - A = \{\{1, 2\}\} \quad -۱$$

$$\text{الف) } A' = \{5, 6, 7, 8, 9\} \quad \text{ب) } A \cap C = \{3, 4\}, (A \cap C)' = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad -۲$$

$$\text{پ) } B - C = \{2, 8\} \quad \text{ت) } A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{5, 7, 9\}$$

$$A_1 = \{m \in Z \mid -1 \leq m, 2^m \leq 1\} = \{-1, 0\} \quad -۳$$

$$A_2 = \{m \in Z \mid -2 \leq m, 2^m \leq 2\} = \{-2, -1, 0, 1\}$$

$$A_3 = \{m \in Z \mid -3 \leq m, 2^m \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

$$A_4 = \{m \in Z \mid -4 \leq m, 2^m \leq 4\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\} \Rightarrow A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \dots \subseteq A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^4 A_i = A_1, \quad \bigcup_{i=1}^4 A_i = A_4$$

$$A_1 = (-1, 1), A_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), A_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^3 A_i = (-1, \frac{5}{3}), \bigcap_{i=1}^3 A_i = (-\frac{1}{3}, 1) \quad -۴$$

$$A_1 = [-1, 9], A_2 = [-2, 8], A_3 = [-3, 7], \dots, A_n = [-n, 0] \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i = [-1, 9], \bigcap_{i=1}^n A_i = [-1, 0] \quad -۵$$

$$A = \{\text{اعداد طبیعی کمتر از } 10 \text{ بخش پذیر بر } 2\} = \{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow n(A) = 4 \quad -۶$$

$$B = \{\text{اعداد طبیعی کمتر از } 10 \text{ بخش پذیر بر } 3\} = \{3, 6, 9\} \Rightarrow n(B) = 3$$

$$A \cup B = \{\text{اعداد طبیعی کمتر از } 10 \text{ بخش پذیر بر } 2 \text{ یا } 3\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\} \Rightarrow n(A \cup B) = 6$$

?

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow 6 \neq 4 + 3 \quad \text{لذا}$$

(۷- الف)

$$(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$

$$= ((A \cap B') \cup (A \cap B)) \cup (B - A)$$

$$= (A \cap (B \cup B')) \cup (B - A)$$

$$= (A \cap M) \cup (B - A)$$

$$= A \cup (B \cap A')$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cup A')$$

$$= (A \cup B) \cap M$$

$$= A \cup B$$

(۱) خاصیت $A - B = A \cap B'$

(۲) خاصیت پفشی اشتراک به اجتماع

(۳) تعریف متمم $A \cup A' = M$

(۴) خاصیت مربع $A \cap M = A$

(۵) خاصیت پفشی اجتماع به اشتراک

(۶) مورد ۳

(۷) مورد ۴

(ب)

$$(A - B) \cap (B - A)$$

$$= (A \cap B') \cap (B \cap A')$$

$$= ((A \cap B') \cap B) \cap A'$$

$$= (A \cap (B' \cap B)) \cap A'$$

$$= (A \cap \emptyset) \cap A'$$

$$= \emptyset \cap A'$$

$$= \emptyset$$

(۱) خاصیت $A - B = A \cap B'$

(۲) شرکت پذیری اشتراک

(۳) شرکت پذیری اشتراک

(۴) خاصیت متمم $A \cap A' = \emptyset$

(۵) $A \cap \emptyset = \emptyset$

(۶) $A \cap \emptyset = \emptyset$

$$x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow{A \subseteq C} x \in C \\ \vee \\ x \in B \xrightarrow{B \subseteq C} x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in C \Rightarrow A \cup B \subseteq C \quad (ج)$$

$$\begin{cases} x \in A, A \subseteq C \Rightarrow x \in C \\ \wedge \\ x \in A, A \subseteq B \Rightarrow x \in B \end{cases} \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow A \subseteq B \cap C \quad (د)$$

$$\begin{cases} A \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B \\ \quad \quad \quad \wedge \quad \quad \quad \Rightarrow A = B \\ B \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq A \end{cases} \quad (۵)$$

(۶) چون $(A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B)$ پس

$$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow (A \cup B)' = B' \Rightarrow A' \cap B' = B' \Rightarrow B' \subset A'$$

زیرا همچنین $(A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A)$

۸- الف)

$$\begin{aligned} A \Delta B & \quad \text{تعریف } A \Delta B \\ &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (B - A) \cup (A - B) \quad \text{خاصیت جابجائی اجتماع} \\ &= B \Delta A \quad \text{تعریف } B \Delta A \end{aligned}$$

$$A \Delta B$$

$$\begin{aligned} &= (A - B) \cup (B - A) & (۱) \text{ تعریف } A \Delta B & \quad (ب) \\ &= (A \cap B') \cup (B \cap A') & (۲) \text{ فرمول } A - B = A \cap B' & \\ &= ((A \cap B') \cup B) \cap ((A \cap B') \cup A') & (۳) \text{ پفشی } \cup \text{ به } \cap & \\ &= ((A \cup B) \cap (B' \cup B)) \cap ((A \cup A') \cap (B' \cup A')) & (۴) \text{ مورد } ۳ & \\ &= ((A \cup B) \cap M) \cap (M \cap (B' \cup A')) & (۵) \text{ رابطه } A \cup A' = M & \\ &= (A \cup B) \cap (A' \cup B') & (۶) \text{ رابطه } A \cap M = A & \\ &= (A \cup B) - (A' \cup B')' & (۷) \text{ رابطه طلایی } A - B = A \cap B' & \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) & (۸) \text{ قانون دمورگان} & \end{aligned}$$

$$A \cap B = \emptyset, A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) - \emptyset = A \cup B \quad (ج)$$

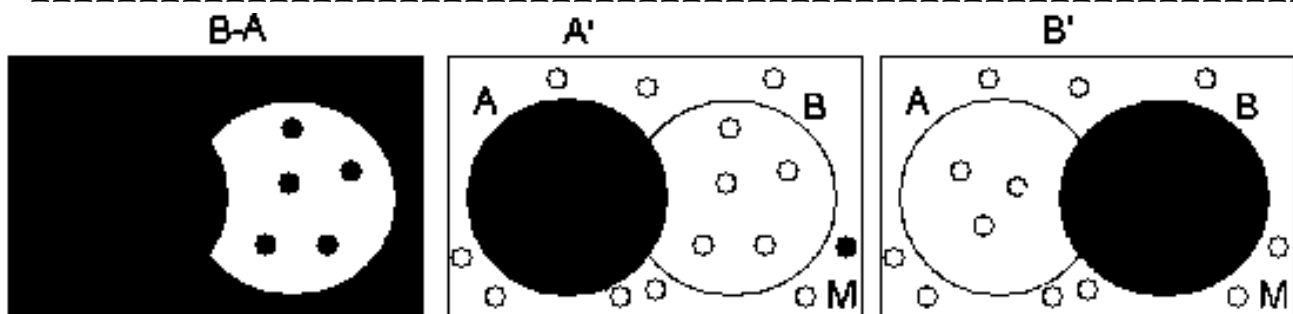
$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) \quad (د)$$

$$= ((A \cap B) \cup (A \cap C)) - ((A \cap B) \cap (A \cap C)) \quad (\text{تعریف } A \Delta B)$$

$$= (A \cap (B \cup C)) - (A \cap (B \cap C)) \quad (\text{خاصیت پفشی } \cap \text{ به } \cup)$$

$$= A \cap ((B \cup C) - (B \cap C)) \quad (\text{خاصیت پفشی } \cap \text{ به } -)$$

$$= A \cap (B \Delta C) \quad (\text{تعریف } A \Delta B)$$



۱۰- الف)

$$(A - B) \cap B$$

$$= (A \cap B') \cap B \quad (۱) \text{ فرمول تلائی } A - B = A \cap B'$$

$$= A \cap (B' \cap B) \quad (۲) \text{ شرکت پذیری } \cap$$

$$= A \cap \emptyset \quad (۳) \text{ رابطه } A \cap A' = \emptyset$$

$$= \emptyset \quad (۴) \text{ رابطه } A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$x \in B - A \Leftrightarrow \begin{cases} x \in B \Rightarrow x \in B \\ \wedge \\ x \notin A \Rightarrow x \in A' \end{cases} \Leftrightarrow x \in B \cap A' \Rightarrow \begin{cases} B - A \subset B \cap A' \\ \wedge \\ B \cap A' \subset B - A \end{cases} \Rightarrow B - A = B \cap A' \quad (ب)$$

به ترتیب از ۱) تعریف تفاضل ۲) تعریف متمم ۳) تعریف اشتراک ۴) تعریف زیر مجموعه

۵) تعریف تساوی استفاده گردیده است.

(پ)

$$\begin{aligned}
 A - (A \cap B) &= A \cap (A \cap B)' \\
 &= A \cap (A' \cup B') \\
 &= (A \cap A') \cup (A \cap B') \\
 &= \emptyset \cup (A \cap B') \\
 &= A \cap B' \\
 &= A - B
 \end{aligned}$$

(۱) فرمول تلائی $A - B = A \cap B'$

(۲) قانون دمورگان

(۳) پفشی \cap به \cup

(۴) رابطه $A \cap A' = \emptyset$

(۵) رابطه $A \cup \emptyset = A$

(۶) فرمول تلائی $A - B = A \cap B'$

(ت)

$$\begin{aligned}
 (A \Delta B) \cup (A \cap B) &= ((A \cup B) - (A \cap B)) \cup (A \cap B) \\
 &= ((A \cup B) \cap (A \cap B)') \cup (A \cap B) \\
 &= ((A \cup B) \cup (A \cap B)) \cap ((A \cap B)' \cup (A \cap B)) \\
 &= (A \cup B) \cap M \\
 &= A \cup B
 \end{aligned}$$

(۱) معادل تعریف $A \Delta B$

(۲) فرمول تلائی $A - B = A \cap B'$

(۳) پفشی \cup به \cap

(۴) $A \cap B \subset A \cup B$ و $A \cup A' = M$

(۵) $A \cap M = A$

۱۱- N (ت) Z (پ) N (ب) Z یا N (الف)

تذکر: خاصیت پفشی \cap به -

$$\begin{aligned}
 A \cap (B - C) &= (A \cap B) - (A \cap C) \\
 (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)' \\
 &= ((A \cap B) \cap A') \cup ((A \cap B) \cap C') \\
 &= (B \cap (A \cap A')) \cup ((A \cap B) \cap C') \\
 &= (B \cap \emptyset) \cup (A \cap (B \cap C')) \\
 &= \emptyset \cup (A \cap (B - C)) \\
 &= A \cap (B - C)
 \end{aligned}$$

اثبات :

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1=0, y-1=0 \Rightarrow x=1, y=1 \quad (الف)$$

$$x^2 + y^2 = 13, xy = 6 \Rightarrow (x+y)^2 - 2(6) = 13 \Rightarrow (x+y)^2 = 25 \Rightarrow x+y = \pm 5$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \{(2, 3), (3, 2), (-2, -3), (-3, -2)\} \quad (ب)$$

۲- طبق اصل ضرب مجموعه $A \times B$ دارای $m \times n$ عضو است و تعداد زیرمجموعه های $A \times B$ ، $2^{m \times n}$ است.

$$A = \{2(-2) + 1, 2(-1) + 1, 2(0) + 1\} = \{-3, -1, 1\}, \quad B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \times B = \{(-3, 1), (-3, 2), (-3, 3), (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\} \quad (الف)$$

$$B \times A = \{(1, 1), (1, -1), (1, -3), (2, 1), (2, -1), (2, -3), (3, 1), (3, -1), (3, -3)\} \quad (ب)$$

$$(A \times B) \cup (B \times A) = \{(-3, 1), (-3, 2), (-3, 3), (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, -1), (1, -3), (2, 1), (2, -1), (2, -3), (3, 1), (3, -1), (3, -3)\}$$

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(1, 1)\}$$

$$n((A \times B) \cup (B \times A)) = 9 + 9 - 1 = 17, \quad n((A \times B) \cap (B \times A)) = n(\{(1, 1)\}) = 1$$

$$B^2 = B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\} \quad (ج)$$

$$A^2 = A \times A = \{(1, 1), (1, -1), (1, -3), (-1, 1), (-1, -1), (-1, -3), (-3, 1), (-3, -1), (-3, -3)\}$$

$$A^2 - B^2 = \{(-3, -3), (-3, -1), (-3, 1), (-1, -3), (-1, -1), (-1, 1), (1, -3), (1, -1)\}$$

$$n(A^2 - B^2) = 8 \Rightarrow A^2 - B^2 \text{ تعداد زیرمجموعه های } 2^8 = 16 \times 16 = 256$$

$$A = B \Leftrightarrow A \times B = B \times A, \quad A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset \quad (د)$$

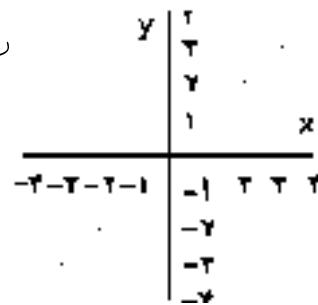
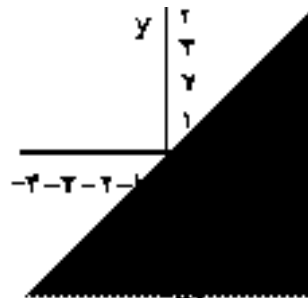
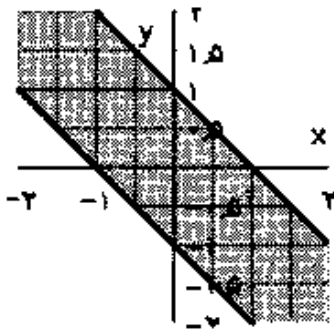
$$5- \text{ بلی, } n(CA) = n(AC) = 12, \quad n(AC) = n(AB) \times n(BC) = 3 \times 4 = 12, \quad \text{طبق اصل ضرب}$$

$$A = \{(2P, \Delta P), (2P, \Delta R), (2R, \Delta P), (2R, \Delta R)\} \Rightarrow n(A) = 4 \quad (ه)$$

۷- الف)

ب)

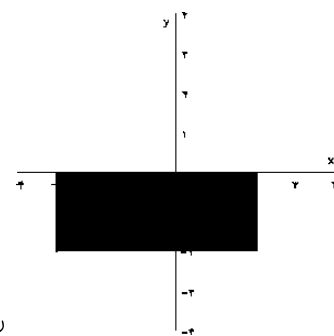
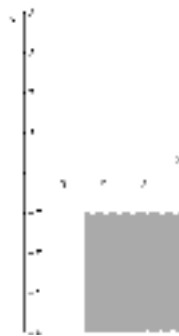
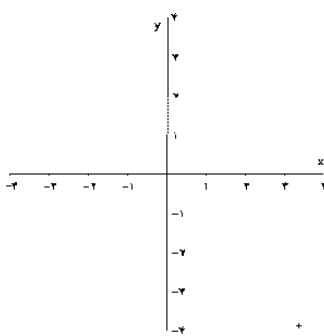
ج)



۸- الف)

ب)

ج)



۹- الف) اگر $A \times B = \emptyset$ طبق تعریف ضرب دکارتی یکی از مجموعه های A یا B تهی بوده است و بالعکس

$$A = \emptyset \Rightarrow A \times C = \emptyset \Rightarrow B \times C = \emptyset, C \neq \emptyset \Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow A = B$$

$$A \neq \emptyset, C \neq \emptyset, \begin{cases} x \in A \\ y \in C \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in A \times C = B \times C \Rightarrow x \in B, y \in C \Rightarrow A \subseteq B \quad \text{ب)}$$

همین روند را میتوان برای B در نظر گرفت پس $B \subseteq A$ بنابراین طبق تعریف $A = B$.

۱- الف) \times $1R2$, \checkmark $1R\pi$, \times $2R0$, \times $4R1$ ب) $\{0, 2\}$

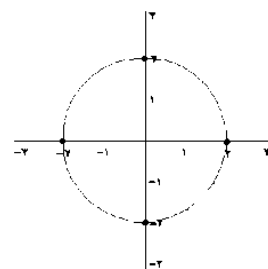
۲- هر زیر مجموعه $A \times A$ یک رابطه است و $n(A \times A) = 25$ پس تعداد روابط 25^{25} است.

۳- طبق تعریف چون $\emptyset \subset A \times B$ پس یک رابطه است.

$$R = \{(\cdot, \cdot), (1, \cdot), (2, \cdot), (3, \cdot), (4, \cdot), (5, \cdot), (6, \cdot), (7, \cdot), (8, \cdot), (9, \cdot), \\ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), \\ (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9)\}$$

$$\Rightarrow D_R = \{\cdot, 1, \dots, 9\}, R_R = \{\cdot, 1, \dots, 9\}$$

$$R = \{(\cdot, 2), (\cdot, -2), (2, \cdot), (-2, \cdot)\}$$



۶- الف) $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$

ب) $B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$

ج) $C = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$

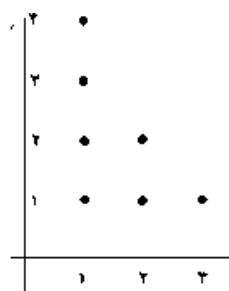
د) $D = \{(1, 1)\}$



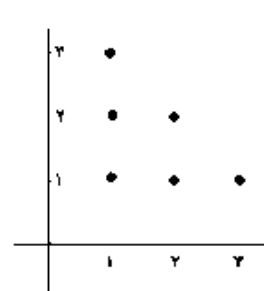
(د)



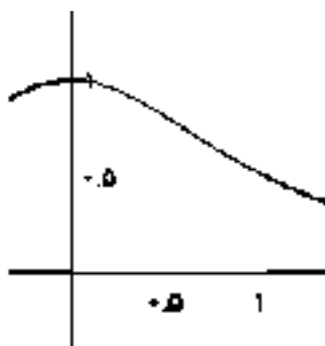
(ج)



(ب)



(الف)



۷- نموداری که در قسمت سفید رنگ قرار دارد جواب است.

۸- نمودارها به ترتیب راست به چپ و بالا به پایین

$$R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,6), (2,2), (2,6), (3,3), (3,6), (6,6)\}$$

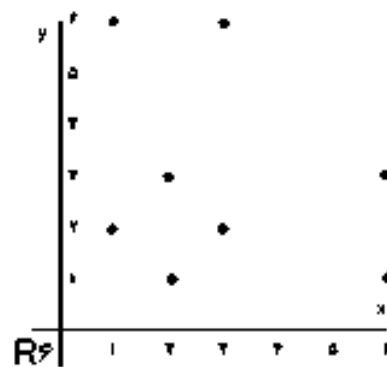
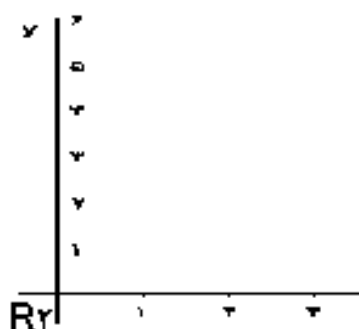
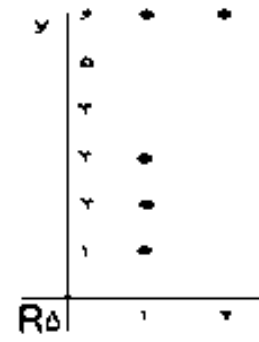
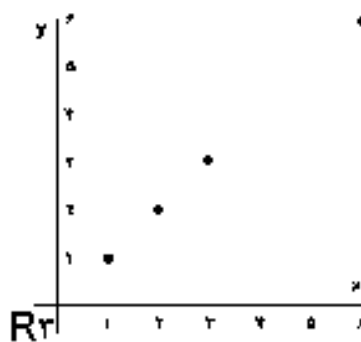
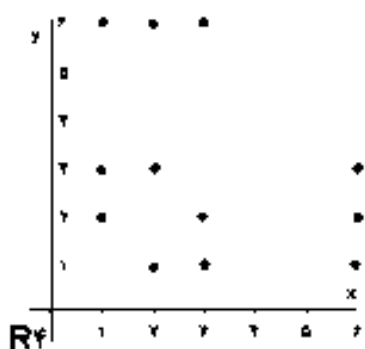
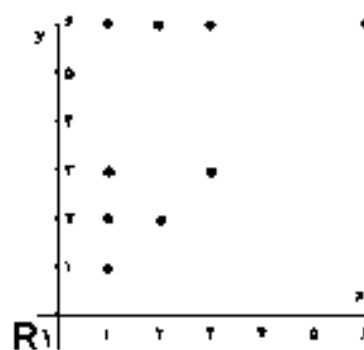
$$R_2 = \{(1,2), (1,3), (1,6), (2,3), (2,6), (3,6)\}$$

$$R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (6,6)\}$$

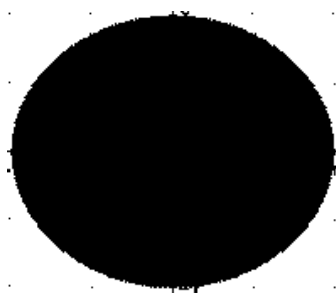
$$R_4 = A^2 - R_3$$

$$R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,6), (2,6)\}$$

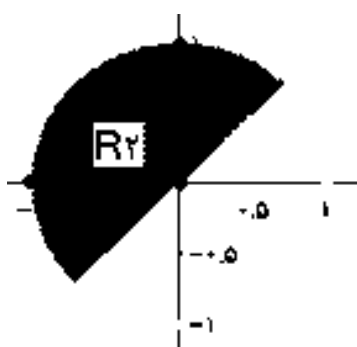
$$R_6 = \{(1,2), (1,6), (2,1), (2,3), (3,2), (3,6), (6,1), (6,3)\}$$



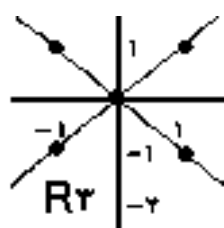
-۹



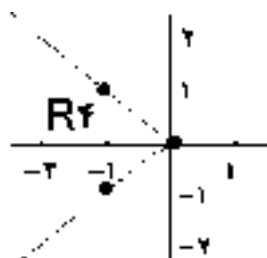
$$R_1: x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & \cdot & \cdot & 2 & -2 \\ \hline y & 2 & -2 & \cdot & \cdot \end{array}$$



$$R_2: x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & \cdot & \cdot & 1 & -1 \\ \hline y & 1 & -1 & \cdot & \cdot \end{array}, y = x \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & \cdot & 1 \\ \hline y & 1 & \cdot \end{array}$$



$$R_3: |y| = |x| \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & \cdot & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline y & \cdot & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$



$$R_4: |y| = -x \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & \cdot & -1 & -1 \\ \hline y & \cdot & 1 & -1 \end{array}$$

۱-

بازتابی : $xRx \Leftrightarrow 3|x-x \Leftrightarrow 3|0$ ✓

تقارنی : $xRy \Leftrightarrow 3|x-y \Leftrightarrow 3|y-x \Leftrightarrow yRx$ ✓

ترانزیتی : $xRy, yRz \Rightarrow 3|x-y, 3|y-z \Rightarrow 3|x-y+y-z \Rightarrow 3|x-z \Rightarrow xRz$ ✓

۳ کلاس هم ارزی شامل $[0], [1], [2]$ زیرا هر عدد صحیح در تقسیم بر ۳ باقیمانده ۰ یا ۱ یا ۲ دارد.

مثلا $[1] = \{x \in \mathbb{Z} | xR1\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3|x-1 \Leftrightarrow x=3k+1\} = \{\dots, -2, 1, 4, \dots\}$

۲-

بازتابی : $\Delta ABC \sim \Delta ABC$ ✓

تقارنی : $\Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow \Delta MNP \sim \Delta ABC$ ✓

ترانزیتی : $\Delta ABC \sim \Delta MNP, \Delta MNP \sim \Delta EFG \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta EFG$ ✓

۳- الف) هم ارزی هست زیرا $(a,b)R(a,b) \Rightarrow a+b=b+a$ ✓

تقارنی : $(a,b)R(c,d) \Rightarrow a+d=b+c \Rightarrow c+b=d+a \Rightarrow (c,d)R(a,b)$ ✓

ترانزیتی : $(a,b)R(c,d), (c,d)R(m,n) \Rightarrow \begin{cases} a+d=b+c \\ c+n=d+m \end{cases} \Rightarrow a-m=b-n \Rightarrow a+n=b+m \Rightarrow (a,b)R(m,n)$ ✓

ب) هم ارزی نیست زیرا $(a,b)R(a,b) \Rightarrow (a-a)(b-b)=0 \Rightarrow 0 \times 0 = 0$ ✓

تقارنی : $(a,b)R(c,d) \Rightarrow (a-c)(b-d)=0 \Rightarrow (c-a)(d-b)=0 \Rightarrow (c,d)R(a,b)$ ✓

رابطه ترانزیتی برقرار نیست \times $\Rightarrow ???$ $(a,b)R(c,d), (c,d)R(m,n) \Rightarrow \begin{cases} (a-c)(b-d)=0 \\ (c-m)(d-n)=0 \end{cases}$

مثال نقض $(2,4)R(7,5), (2,4)R(2,5), (2,5)R(7,5)$ ولی $(2,4)R(7,5)$ نادرست است.

پ) هم ارزی هست زیرا $(a,b)R(a,b) \Rightarrow ab=ab$ ✓

تقارنی : $(a,b)R(c,d) \Rightarrow ab=cd \Rightarrow cd=ab \Rightarrow (c,d)R(a,b)$ ✓

ترانزیتی : $(a,b)R(c,d), (c,d)R(m,n) \Rightarrow ab=cd, cd=mn \Rightarrow ab=mn \Rightarrow (a,b)R(m,n)$ ✓

۱- اگر پشت P و رو R ، در نظر بگیریم آنگاه $S = \{RR, RP, PR, PP\}$

تذکر: منظور از RR یعنی (R, R) یعنی اولی رو و دومی هم رو بیاید.

۲- اگر پشت P و رو R ، در نظر بگیریم آنگاه

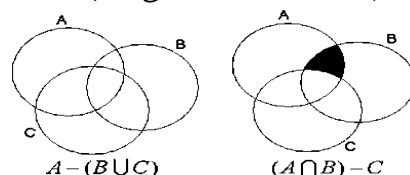
$S = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$

تذکر: R_1 یعنی $(R, 1)$ یعنی سکه رو و تاس عدد ۱ رو بیاید.

۱- A پیشامد اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰ و B پیشامد عدد اول و C پیشامد عدد فرد کوچکتر از ۱۰ باشد،

$$A = \{1, 2, \dots, 9\}, B = \{2, 3, 5, 7\}, C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

الف) $(A \cap B) - C = \{2\}$ ب) $A - (B \cup C) = \{4, 6, 8\}$



۲- $A = \{\text{شوشتر، فرمشهر}\}$ ، $B = \{\text{آبادان، فرمشهر}\}$ ، $C = \{\text{شوشتر، اهواز}\}$

الف) $A' = \{\text{اهواز، آبادان، دزفول}\}$ ب) $C' = \{\text{آبادان، دزفول، فرمشهر}\}$

پ) $B \cap C = \{\}$ ت) $B \cup C = \{\text{شوشتر، اهواز، آبادان، فرمشهر}\}$

ث) $A \cup B = \{\text{آبادان، شوشتر، فرمشهر}\}$ ج) $(B \cup C)' = \{\text{دزفول}\}$

چ) $B' \cap C' = (B \cup C)' = \{\text{دزفول}\}$

۳- الف) $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ب) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

پ) $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ث) $C = \{7, 8, 9\}$

۴- $S = \{(R, R), (R, P), (P, R), (P, P)\}$ $A = \{(R, P), (P, R), (P, P)\}$

۵- $S = \{(R, R, R), (R, R, P), (R, P, R), (R, P, P),$
 $(P, R, R), (P, R, P), (P, P, R), (P, P, P)\}$

$A = S - \{(P, P, P)\}$

۶- $S = \{(R, 1), (R, 2), \dots, (R, 6), (P, 1), \dots, (P, 6)\}$

$A = \{(R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6), (P, 6)\}$

۷- بله می توان در نظر گرفت ولی در این فضای نمونه ای عضوها غیر هم شانس هستند.

$$S = \{(R, ۱), (R, ۲), (R, ۳), (R, ۴), (R, ۵), (R, ۶), (P, R, R), (P, R, P), (P, P, R), (P, P, P)\} \quad \text{الف} \quad -۸$$

$$\text{ب) } A = \{(P, R, R)\}$$

$$\text{پ) } B = \{(P, R, P), (P, P, R), (P, P, P)\}$$

$$S = \{(x, y) \in R \times R \mid (x-۲)^۲ + (y+۳)^۲ \leq ۹\} \quad -۹$$

یادآوری :

دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r دارای فرمول $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$ است.
اگر نقطه $A(x, y)$ به گونه ای باشد که $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ < r^۲$ نقطه A داخل دایره و
هرگاه $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ > r^۲$ نقطه A خارج دایره واقع است.

$$S = \{(G, B), (G, G), (B, G), (B, B)\}$$

۱- $G =$ دختر ، $B =$ پسر

$$A = \{(G, B), (B, G), (G, G)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

۲- از چپ خانه ۱ دارای ۹ حالت ۱، ۲، ...، ۹، خانه ۲ دارای ۹ حالت یعنی ۱، ۲، ...، ۹ که یکی از آنها در خانه ۱ انتخاب شده و خانه ۳ دارای ۸ حالت است. زیرا از ۱، ۲، ...، ۹ دو تا در خانه های ۱، ۲ انتخاب شده اند.

۹ ۹ ۸

پس طبق اصل ضرب تعداد حالات $9 \times 9 \times 8$ حالت است و رمز فقط

$$P(A) = \frac{1}{9^2 \times 8} = \frac{1}{648}$$

یکی از این حالات است، پس

تذکره: در تمرین ۳ و ۲ چون کلمه ی عدد ذکر شده اولین رقم از سمت چپ را غیر صفر در نظر می گیریم.

۹ ۹ ۸ ۷ ۶

$$P(A) = \frac{1}{9^2 \times 8 \times 7 \times 6}$$

۳- مانند تمرین ۲

۴- با شرط مسئله برای فضای نمونه ای، خانه ۱ از چپ دارای ۲ حالت $\{3, 1\}$ و سه خانه دیگر هر یک ۵ حالت

۲ ۵ ۵ ۵

$$n(S) = 2 \times 5^3$$

برای آنکه بر ۵ بشمار باشد خانه ۴ باید $\{5\}$ باشد (صفر نداریم) که ۱ حالت است و بقیه خانه ها همان تعداد

۲ ۵ ۵ ۱

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \times 5 \times 5 \times 1}{2 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{5}$$

است. پس

۷ ۷ ۷ ۷

$$\Rightarrow n(S) = 7^4$$

۵- فرض تکرار مجاز

۵ ۵ ۵ ۵

$$\Rightarrow n(A) = 5^4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5^4}{7^4} = \left(\frac{5}{7}\right)^4$$

۷ ۶ ۵ ۴

$$\Rightarrow n(S) = 7 \times 6 \times 5 \times 4$$

فرض تکرار غیر مجاز

۵ ۴ ۳ ۲

$$\Rightarrow n(A) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{7}$$

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\} \quad -۶$$

$$\text{الف)} \quad A = \{(2,3), (3,2)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{9}$$

$$\text{ب)} \quad B = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{9}$$

$$\text{الف)} \quad P(A) = \frac{\binom{5}{3} \times \binom{6}{2}}{\binom{11}{5}} = \frac{10 \times 15}{462} = \frac{25}{77} \quad \text{ب)} \quad P(B) = \frac{\binom{5}{5} \times \binom{6}{0}}{\binom{11}{5}} = \frac{1}{462} \quad -۷$$

$$\text{پ)} \quad P(C) = \frac{\binom{6}{4} \times \binom{5}{1} + \binom{6}{5} \times \binom{5}{0}}{\binom{11}{5}} = \frac{15 \times 5 + 6 \times 1}{462} = \frac{81}{462} = \frac{27}{154}$$

$$S = \{(1,ر), (2,ر), \dots, (6,ر), (1,پ), (2,پ), \dots, (6,پ)\} \Rightarrow n(S) = ۱۲ \quad -۸$$

$$\text{الف)} \quad A = \{(2,ر), (4,ر), (6,ر)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{(2,ر), (2,پ), (4,ر), (4,پ), (6,ر), (6,پ), (1,ر), (3,ر), (5,ر)\}$$

$$\text{ب)} \quad \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\text{الف)} \quad P(A) = \frac{۱۰}{۴۵} = \frac{۲}{۹} \quad \text{ب)} \quad P(B) = \frac{\binom{۲۰}{۱} \times \binom{۱۰}{۱}}{\binom{۴۵}{۲}} = \frac{۲۰ \times ۱۰}{۴۵ \times ۲۲} = \frac{۲۰}{۹۹} \quad -۹$$

۱۰- کل حالات ۸ حالت و حالت مورد نظر تنها یک حالت است. $A = \{(د, د, د)\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{8}$ (الف)

ب) $B = \{(غ, غ, غ)\} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{8}$

پ) $C = \{(د, د, د), (د, د, غ), (د, غ, د), (غ, د, د)\} \Rightarrow P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(الف)

۱۱-

ب) $B = \{(د, پ), (پ, د)\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

پ) $C = \{(د, پ), (پ, د), (د, د)\} \Rightarrow P(C) = \frac{3}{4}$

۱۲- (الف) $\frac{6}{25}\%$ 25% $\frac{37}{5}\%$ 25% $\frac{6}{25}\%$

۱۲-

ب) $P(B) = \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$ دست کم دو روز یعنی دو روز یا سه روز یا چهار روز

پ) هر دو هم شانس اند $\Rightarrow P(C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ دقیقاً یک روز، $P(C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ دقیقاً سه روز

۱۳- (الف) آمدن ۱۰ رو بالاترین احتمال را دارد پس ممتل تر است.

ب) تقریباً ۲۰ درصد یعنی $P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

پ) هر چه تعداد سکه ها بیشتر باشد احتمال برابر بودن تعداد پشت و رو کمتر است.

ت) احتمال کاهش می یابد.

تذکره: در پرتاب ۱۰ سکه احتمال برابر بودن تعداد رو و پشت برابر $\frac{\binom{10}{5}}{2^{10}}$ و برای ۲۰ سکه $\frac{\binom{20}{10}}{2^{20}}$ است

و $\frac{\binom{20}{10}}{2^{20}} < \frac{\binom{10}{5}}{2^{10}}$

۱- غیر مجاز چون

الف) $P(B) + P(W) + P(G) + P(R) = ۰/۳ + ۰/۲۴ + ۰/۲۸ + ۰/۳۲ = ۱/۱۴ > ۱$

ب) $P(B) + P(W) + P(G) + P(R) = ۰/۳ + ۰/۳ + ۰/۱۴ + ۰/۲۶ = ۱$
 $, ۰ \leq P(B), P(W), P(G), P(R) \leq ۱$

مجاز چون

۲-
$$\begin{cases} P(ج) = ۲P(پ) \\ P(ج) + P(پ) = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۲P(پ) + P(پ) = ۱ \Rightarrow P(پ) = \frac{۱}{۳}, P(ج) = \frac{۲}{۳}$$

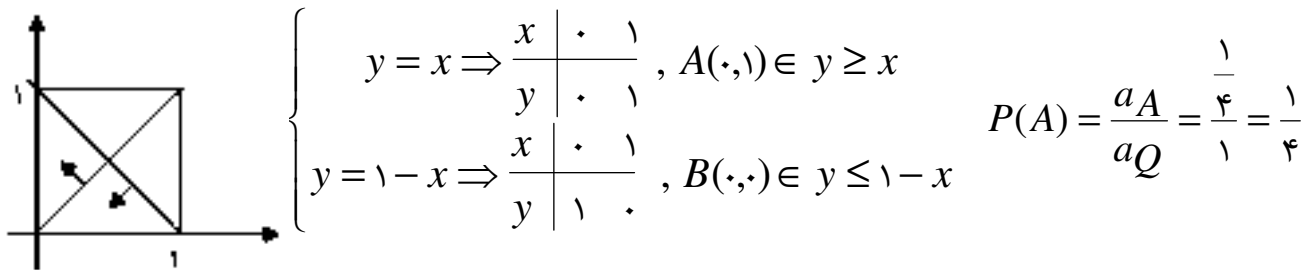
۳-
$$\begin{cases} P(a) = P(b) = ۲P(c) \\ P(a) + P(b) + P(c) = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۲P(c) + ۲P(c) + P(c) = ۱ \Rightarrow P(c) = \frac{۱}{۵}$$

$, P(a) = P(b) = \frac{۲}{۵}, P(\{b, c\}) = P(b) + P(c) = \frac{۲}{۵} + \frac{۱}{۵} = \frac{۳}{۵}$

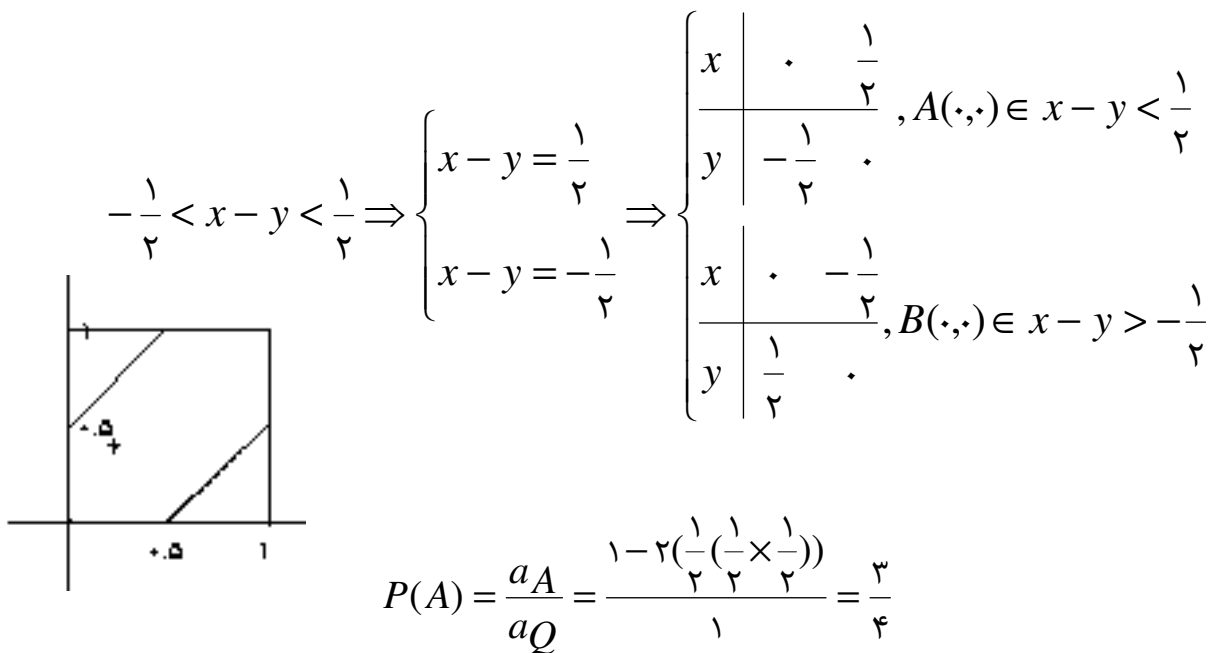
$$S = \{x \mid x \in R, 0 < x < 3\}, A = \{x \mid x \in S, 1 < x < 2/5\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{2/5 - 1}{3 - 0} = \frac{1/5}{3} = \frac{1}{15} \quad -1$$

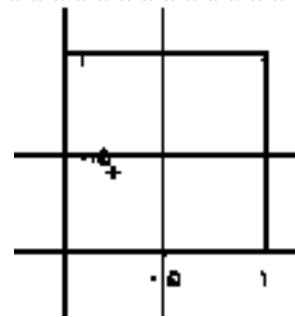
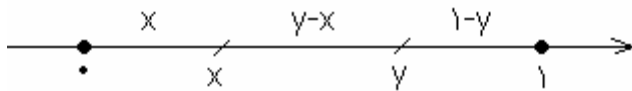
$$Q = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, A = \{(x, y) \in Q \mid x \leq y \leq 1 - x\} \quad -2$$



$$Q = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, A = \{(x, y) \in Q \mid -\frac{1}{2} < x - y < \frac{1}{2}\} \quad -3$$



-۸



$$Q = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, A = \{(x, y) \in Q \mid y - x < \frac{1}{2}, y > \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}\}$$

$$\begin{cases} x + (y - x) > 1 - y \Rightarrow y > \frac{1}{2} \\ x + (1 - y) > y - x \Rightarrow y - x < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & \cdot \frac{1}{2} \\ y & \frac{1}{2} \quad 1 \end{array} \Rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_Q} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \\ (y - x) + (1 - y) > x \Rightarrow x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

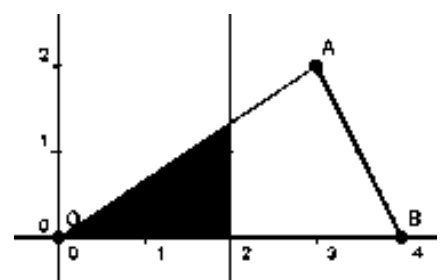
-۵ الف

$$O(0,0) \quad A(3,2) \quad B(4,0)$$

$$OA \text{ خط } \text{دایره} : m = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3} \Rightarrow y - 0 = \frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$$

$$x = 2 \text{ با } OA \text{ تقاطع} : x = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}(2) = \frac{4}{3} \Rightarrow N(2, \frac{4}{3})$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{1}{2}(2 \times \frac{4}{3})}{\frac{1}{2}(4 \times 2)} = \frac{1}{3}$$



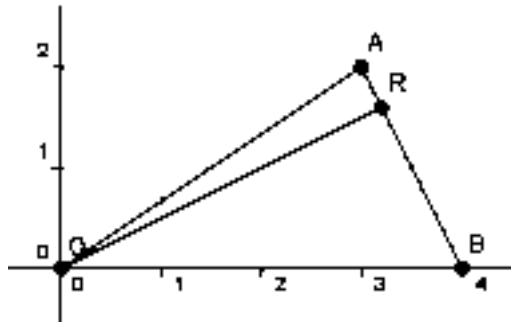
$$x = 2y \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & \cdot 2 \\ y & \cdot 1 \end{array}$$

ب

$$AB \text{ خط } \text{دایره} : m = \frac{2-0}{3-4} = -2 \Rightarrow y - 0 = -2(x - 4) \Rightarrow y = -2x + 8$$

$$x = 2y \text{ با } AB \text{ تقاطع} : \begin{cases} x = 2y \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Rightarrow y = -4y + 8 \Rightarrow y = \frac{8}{5}, x = \frac{16}{5} \Rightarrow R(\frac{16}{5}, \frac{8}{5})$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{S_{OAR}}{S_{OAB}} = \frac{S_{OAB} - S_{ORB}}{S_{OAB}} = \frac{\frac{1}{2}(4 \times 2) - \frac{1}{2}(4 \times \frac{1}{5})}{\frac{1}{2}(4 \times 2)} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \quad (\text{ب})$$

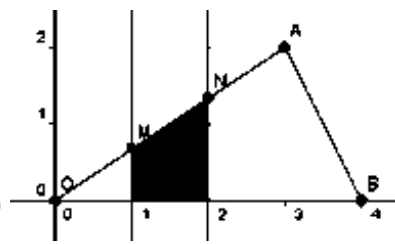


$$OA \text{ معادله خط: } y = \frac{2}{3}x$$

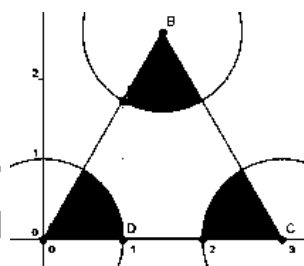
$$x=1 \text{ با خط } OA \text{ قطع: } y = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow M(1, \frac{2}{3})$$

$$x=2 \text{ با خط } OA \text{ قطع: } y = \frac{2}{3}(2) = \frac{4}{3} \Rightarrow N(2, \frac{4}{3})$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(\frac{4}{3} + \frac{2}{3})(1) = 1, \quad P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{1}{\frac{1}{2}(4 \times 2)} = \frac{1}{4}$$



(ب)



۶- **یادداشت ۱:** مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه ثابت فاصله ثابت دارند

دایره ای است به مرکز آن نقطه ثابت و شعاع مقدار ثابت.

یادداشت ۲: کافی است به مرکز، اسرها دوایری به شعاع ۱، رسم کنیم.

پاسخ: زاویه اسرها ۶۰ درجه است و هر سه با هم تشکیل نیم دایره می دهند،

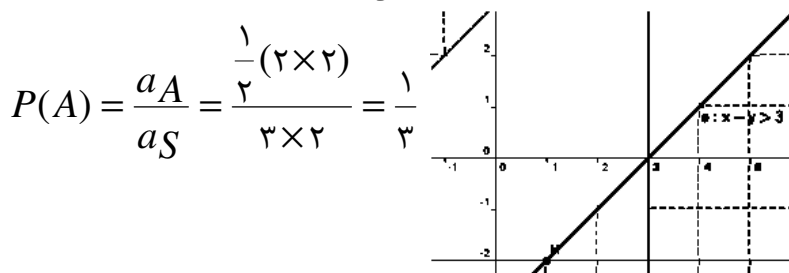
$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(3)^2 - \frac{1}{2}\pi(1)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}(3)^2} = 1 - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

$$S = \{(a, b) \in R^2 \mid 0 \leq a \leq 3, -2 \leq b \leq 0\}$$

$$A = \{(a, b) \in S \mid |a - b| > 3\} = \{(a, b) \in S \mid a - b > 3 \text{ or } a - b < -3\} \quad -۷$$

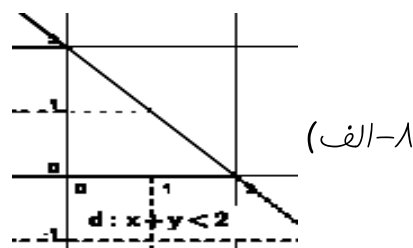
$$a - b = 3 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} a & 0 & 3 & 1 & 3 \\ \hline b & -3 & 0 & -2 & 0 \end{array}, \quad a - b = -3 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} a & 0 & 3 & -5 & -3 \\ \hline b & 3 & 6 & -2 & 0 \end{array}$$

$$b = -2 \text{ باشد } a - b = 3 \text{ قطعاً: } a - (-2) = 3 \Rightarrow a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow M(1, -2)$$



$$S = \{(x, y) \mid 0 < x < 2, 0 < y < 2\}, \quad A = \{(x, y) \in S \mid x + y < 2\}$$

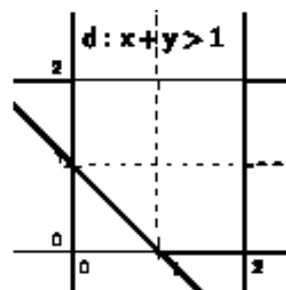
$$x + y = 2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}, \quad P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{1}{2}(2 \times 2)}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$



$$B = \{(x, y) \in S \mid x + y > 1\}$$

$$x + y = 1 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 2 & 1 & -1 \\ \hline y & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}$$

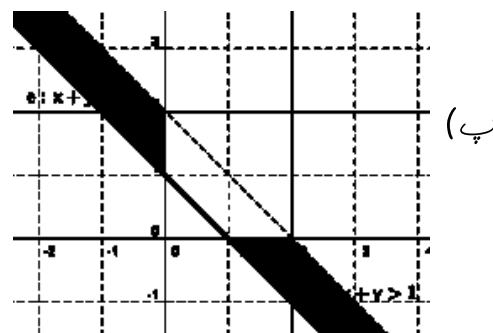
$$P(B) = \frac{a_B}{a_S} = \frac{2 \times 2 - \frac{1}{2}(1 \times 1)}{2 \times 2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



$$C = \{(x, y) \in S \mid 1 < x + y < 2\}$$

$$x + y = 1 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array}, \quad x + y = 2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$$

$$P(C) = \frac{a_C}{a_S} = \frac{2 \times 2 - \frac{1}{2}(2 \times 2) - \frac{1}{2}(1 \times 1)}{2 \times 2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$



$$S = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 < x < 2, 0 < y < 2\} \quad -9$$

(الف) $\frac{x}{y} = 1$ نیمساز ربع اول و سوم است (به جز مبدأ) و مساحت خط و پاره خط صفر است پس

$$A = \{(x, y) \in S \mid \frac{x}{y} = 1\}, P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{0}{2 \times 2} = 0.$$

$$B = \{(x, y) \in S \mid \frac{x}{y} < 1 \text{ or } \frac{y}{x} < 1\} \quad (\text{ب})$$

بمث: چون صحبت از ترتیب انتقاب نیست هر دو حالت $\frac{x}{y}, \frac{y}{x}$ ممکن است. البته در برخی

حالتها مثلاً $x + y < 1, y + x < 1$ تفاوتی ندارند.

$$P(B) = \frac{a_B}{a_S} = \frac{2 \times 2}{2 \times 2} = 1 \quad \text{هر دو عدد دلخواه غیر صفر متعلق به } B \text{ هستند پس}$$

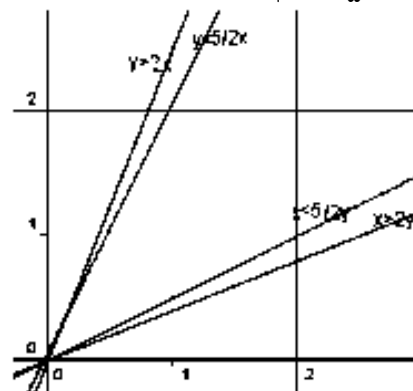
$$C = \{(x, y) \in S \mid 0.4 < \frac{x}{y} < 0.5 \vee 0.4 < \frac{y}{x} < 0.5\} \quad (\text{پ})$$

دو قسمت در مجموعه C دارای مساحت برابرند. پس یکی از آنها را یافته، مقدارش را دو برابر می کنیم.

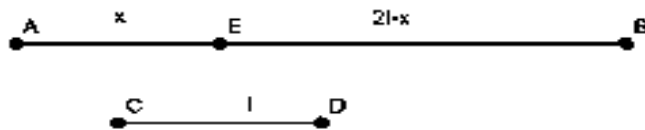
$$\frac{x}{y} = 0.5 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ y & 0 & 2 & 4 \end{array}, \frac{x}{y} = 0.4 \Rightarrow y = \frac{5}{2}x \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \frac{4}{5} & 2 \\ y & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

$$\frac{y}{x} = 0.5 \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 2 & 4 \\ y & 0 & 1 & 2 \end{array}, \frac{y}{x} = 0.4 \Rightarrow x = \frac{5}{2}y \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 2 & 5 \\ y & 0 & \frac{4}{5} & 2 \end{array}$$

$$P(C) = \frac{a_C}{a_S} = \frac{2(\frac{1}{2})(1 - \frac{4}{5})(2)}{2 \times 2} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{1}} = \frac{1}{10}$$



$$\begin{cases} x + (2l - x) > l \Rightarrow 2l > l \\ x + l > 2l - x \Rightarrow x > \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{l}{2} < x < \frac{3l}{2} \\ 2l - x + l > x \Rightarrow x < \frac{3l}{2} \end{cases}$$



$$S = \{x \in R \mid 0 < x < 2l\}, \quad A = \{x \in S \mid \frac{l}{2} < x < \frac{3l}{2}\}$$

-۱۰

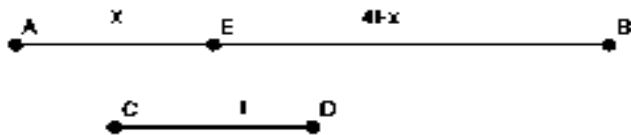
$$P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{\frac{3l}{2} - \frac{l}{2}}{2l} = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x + (4l - x) > l \Rightarrow 4l > l \\ x + l > 4l - x \Rightarrow x > \frac{3l}{2} \Rightarrow \frac{3l}{2} < x < \frac{5l}{2} \\ 4l - x + l > x \Rightarrow x < \frac{5l}{2} \end{cases}$$

$$S = \{x \in R \mid 0 < x < 4l\}, \quad A = \{x \in S \mid \frac{3l}{2} < x < \frac{5l}{2}\}$$

-۱۱ (الف)

$$P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{\frac{5l}{2} - \frac{3l}{2}}{4l} = \frac{l}{4l} = \frac{1}{4}$$

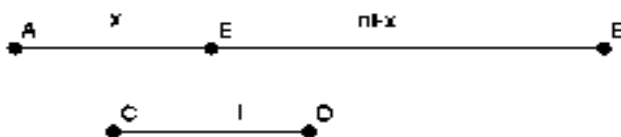


$$\begin{cases} x + (nl - x) > l \Rightarrow nl > l \\ x + l > nl - x \Rightarrow x > \frac{(n-1)l}{2} \Rightarrow \frac{(n-1)l}{2} < x < \frac{(n+1)l}{2} \\ nl - x + l > x \Rightarrow x < \frac{(n+1)l}{2} \end{cases}$$

$$S = \{x \in R \mid 0 < x < nl\}, \quad A = \{x \in S \mid \frac{(n-1)l}{2} < x < \frac{(n+1)l}{2}\}$$

(ب)

$$P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{\frac{(n+1)l}{2} - \frac{(n-1)l}{2}}{nl} = \frac{l}{nl} = \frac{1}{n}$$

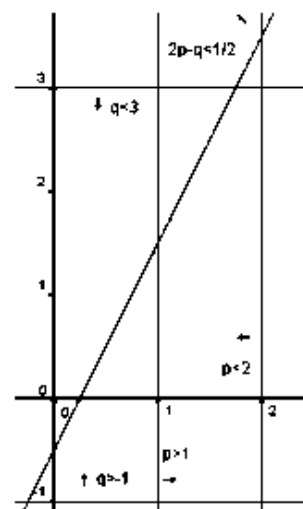


$$S = \{(p, q) \mid 1 < p < 2, -1 < q < 3\}$$

$$A = \{(p, q) \in S \mid 2p - q < \frac{1}{2}\}$$

$$2p - q = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} p & 1 & 2 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ \hline q & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & -1 & 3 \end{array},$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{7}{4} - 1)(3 - \frac{3}{2})}{1 \times 4} = \frac{9}{64}$$

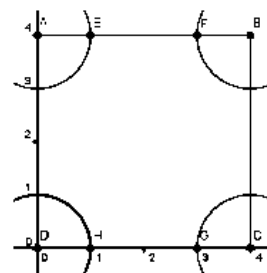


-۱۲

۱۳- توضیح: چهار ربع دایره تشکیل دایره کامل می دهند.

$$\text{الف) } P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{2 \times 2 - \pi(\frac{1}{9})^2}{2 \times 2} = 1 - \frac{\pi}{324}$$

$$\text{ب) } P(B) = \frac{a_B}{a_S} = \frac{l \times l - \pi R^2}{l \times l} = 1 - \pi(\frac{R}{l})^2$$



۱۴- الف) اتوبوسها ۸:۳۰ تا ۸:۱۵ به ایستگاه میرسند. برای آنکه کمتر از ۵ دقیقه معطل بماند باید بین ۸:۱۰ تا ۸:۱۵ یا ۸:۲۵ تا ۸:۳۰ با ایستگاه برسد. پس

$$S = \{x \in R \mid 8 < x < 8:30\}$$

$$A = \{x \in S \mid 8:10 < x < 8:15 \text{ or } 8:25 < x < 8:30\}$$

$$P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{(15-10) + (30-25)}{30-8} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$$

ب) اگر بین ۸ تا ۸:۵ یا ۸:۱۵ تا ۸:۲۰ به ایستگاه برسد بیش از ۱۰ دقیقه معطل می شود

$$S = \{x \in R \mid 8 < x < 8:30\}$$

$$B = \{x \in S \mid 8:0 < x < 8:5 \text{ or } 8:15 < x < 8:20\}$$

$$P(B) = \frac{l_B}{l_S} = \frac{(5-0) + (20-15)}{30-8} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$$

$$S = \{x \in R \mid 4 \leq x \leq 12\}$$

$$A = \{x \in S \mid 4 \leq x \leq 6/35\} \Rightarrow P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{6/35 - 4}{12 - 4} = \frac{2/35}{8} = \frac{47}{160} \quad -10$$

$$S = \{x \in R \mid 2 \leq x \leq 4/3\}$$

$$A = \{x \in S \mid 2 \leq x < 3/25\} \Rightarrow P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{3/25 - 2}{4/3 - 2} = \frac{1/25}{2/3} = \frac{25}{46} \quad -11$$

۱۷- احتمال آن را حساب می کنیم که همرا ملاقات کنند و احمد زودتر از حسن برسد ، یعنی x (قایقی که حسن بعد از ساعت ۴ می رسد و y مربوط به احمد)

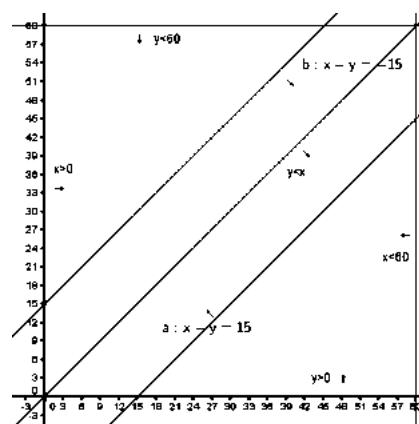
$$A = \{(x, y) \mid |x - y| \leq 15, y < x\}$$

$$S = \{(x, y) \mid 0 < x < 60, 0 < y < 60\}$$

$$x - y = 15 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & 0 & 60 & 15 & 75 \\ y & -15 & 45 & 0 & 60 \end{array}$$

$$x - y = -15 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & 0 & 60 & -15 & 45 \\ y & 15 & 75 & 0 & 60 \end{array}$$

$$x = y \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 60 \\ y & 0 & 60 \end{array}$$



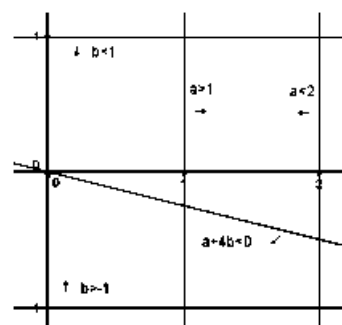
$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{1}{2}(60 \times 60) - \frac{1}{2}(45 \times 45)}{60 \times 60} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{9}{16} = \frac{7}{32}$$

$$S = \{(a, b) \mid 1 \leq a \leq 2, -1 \leq b \leq 1\}$$

$$A = \{(a, b) \in S \mid -\frac{b}{a} > 1/25\}$$

$$-\frac{b}{a} = 1/25 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = -4b \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} a & 1 & 2 & 4 & -4 \\ b & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}$$

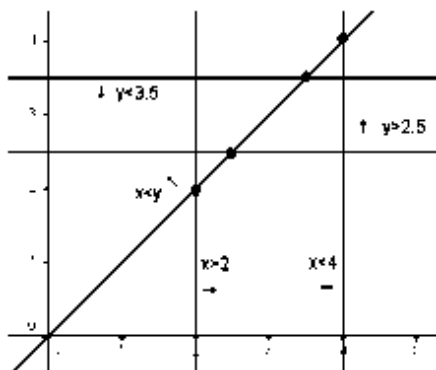
$$-\frac{b}{a} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{a + 4b}{4a} < 0 \Rightarrow \begin{cases} a + 4b > 0, a < 0 \\ or \\ a + 4b < 0, a > 0 \end{cases}$$



اما نکته مهم آنکه

قسمت اول اشتراکی با S ندارد پس احتمال آن صفر است. ولی برای قسمت دوم

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2}((1 - \frac{1}{4}) + (1 - \frac{1}{2})) \times 1}{1 \times 2} = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{5}{8}$$



$$S = \{(x, y) \mid 2 < x < 4, 2/5 < y < 3/5\}$$

$$A = \{(x, y) \in S \mid x < y\}$$

$$x = y \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & 2 & 4 & 2/5 & 3/5 \\ \hline y & 2 & 4 & 2/5 & 3/5 \end{array}$$

(الف)

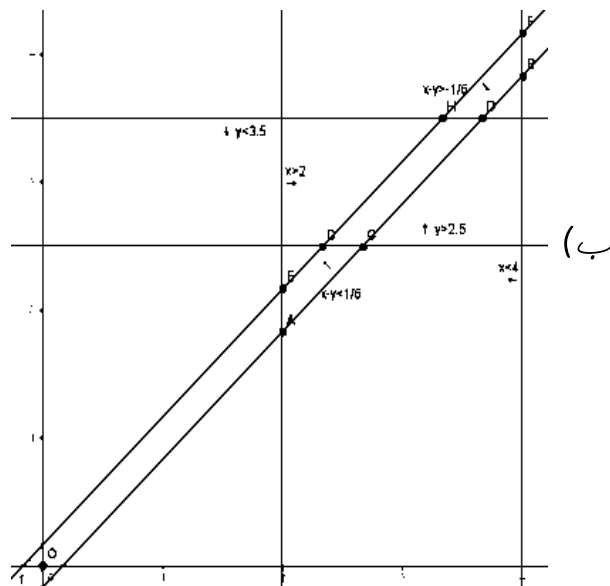
$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{1}{2}(1/5 + 0/5)(1)}{2 \times 1} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{(x, y) \in S \mid |x - y| < \frac{1}{6}\}$$

$$x - y = \frac{1}{6} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & 2 & 4 & \frac{13}{6} & \frac{11}{3} \\ \hline y & \frac{11}{6} & \frac{23}{6} & 2/5 & 3/5 \end{array}$$

$$x - y = -\frac{1}{6} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & 2 & 4 & \frac{7}{3} & \frac{10}{3} \\ \hline y & \frac{13}{6} & \frac{25}{6} & 2/5 & 3/5 \end{array}$$

$$P(B) = \frac{a_B}{a_S} = \frac{(\frac{11}{3} - \frac{7}{3})(1)}{2 \times 1} = \frac{1}{3}$$



(ب)

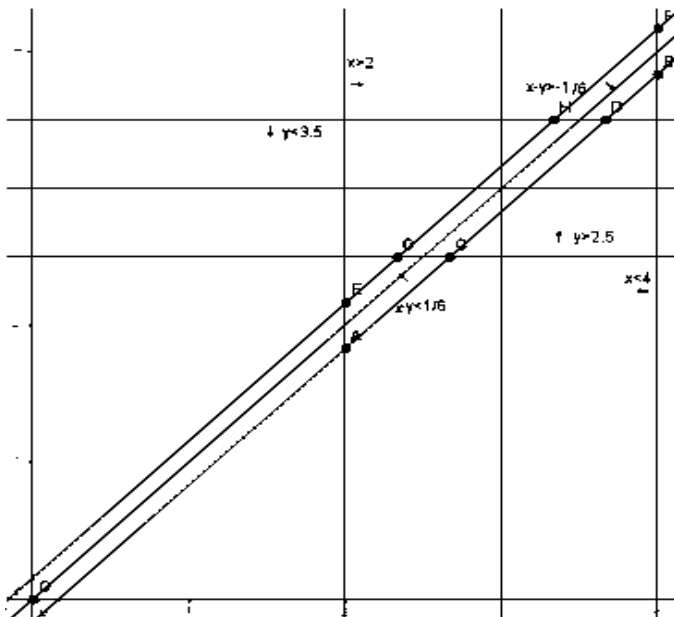
$$C = \{(x, y) \in S \mid x < y, |x - y| < \frac{1}{6}, x < 3, y < 3\}$$

$$P(C) = \frac{a_C}{a_S} = \frac{(\frac{5}{2} - \frac{7}{3})(3 - \frac{5}{2})}{2 \times 1} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{24}$$

(پ)

توضیح نقطه یابی:

همانطور که مشاهده می شود برای نقطه یابی روی خطوط بهتر است کرانه‌های S را برای x, y به x, y قرار دهیم مثلاً در سوال ۱۹ به دو مقدار ۲٫۴ و به جای y دو مقدار ۲٫۵، ۳٫۵ قرار می دهیم تا چهار نقطه به دست آید.



۱- الف) $P(A) = 2P(B), P(B) = P(C) = 2P(D), P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$

$$2P(D) + 2P(D) + 2P(D) + P(D) = 1 \Rightarrow 9P(D) = 1 \Rightarrow P(D) = \frac{1}{9}, \quad P(C) = \frac{2}{9}, \quad P(A) = \frac{4}{9}$$

ب) $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

۲- احتمال استفراغ خانم اکبری x ، معینی y ، میدری z

$$y = 0.5 + x = 0.5 + z, \quad x + y + z = 1 \Rightarrow (y - 0.5) + y + (y - 0.5) = 1$$

$$\Rightarrow 3y = 1.5 \Rightarrow y = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$

۳- طبق جدول ۱۵ درصد درون شهر و در شب

۶۰ درصد حومه شهر و شب

	شب	روز	
حومه	۶۰٪	۲۰٪	۸۰٪
درون شهر	۱۵٪	۵٪	۲۰٪
	۷۵٪	۲۵٪	۱۰۰٪

-۴

$$P(A) = P(A \cap M) = P\left(A \cap (B \cup B')\right) = P\left[(A \cap B) \cup (A \cap B')\right]$$

الف) $= P(A \cap B) + P(A \cap B') - P(A \cap B \cap A \cap B')$ -۵

$$= P(A \cap B) + P(A \cap B') + P(\emptyset) \Rightarrow P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

ب) $P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

۶- $P(A) = P(B) = 1 \Rightarrow A = B = S \Rightarrow P(A \cap B) = P(S \cap S) = P(S) = 1$

$$P(A) = 0.74, P(B) = 0.7, P(C) = 0.64, P(A \cap B) = 0.46, P(B \cap C) = 0.44, \\ P(A \cap C) = 0.72, P(A \cap B \cap C) = 0.34 \Rightarrow P(A \cup B \cup C) = \\ P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \\ 0.74 + 0.7 + 0.64 - 0.46 - 0.72 - 0.44 + 0.34 = 2.08 - 1.62 + 0.34 = 0.8$$

-۷

$$\text{الف) } A \cap B \subset A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \quad \text{ب) } A \subset A \cup B \Rightarrow P(A) \leq P(A \cup B)$$

-۸

$$P(2): P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

$$P(k): P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$$

-۹

$$P(k+1): P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}) = P(A_1) + \dots + P(A_k) + P(A_{k+1})$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{k+1}) =$$

(اثبات)

$$P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_k) + P(A_{k+1}) = P(A_1) + \dots + P(A_k) + P(A_{k+1})$$

$$P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

-۱۰

$$A \cap B = \text{اعداد بر ۳ بخش پذیر} \quad A = \text{اعداد بر ۵ بخش پذیر} \quad B = \text{اعداد بر ۱۵ بخش پذیر}$$

-۱۲

$$n(A) = \left[\frac{1000}{3} \right] = 333, \quad n(B) = \left[\frac{1000}{5} \right] = 200, \quad n(A \cap B) = \left[\frac{1000}{15} \right] = 66 \quad \text{الف)}$$

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B') = \frac{333}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{267}{1000}$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{333}{1000} - \frac{200}{1000} + \frac{66}{1000} = 1 - \frac{467}{1000} = \frac{533}{1000} \quad \text{ب)}$$

$$C = \text{اعداد بر ۴ بخش پذیر} \quad A = \text{اعداد بر ۵ بخش پذیر} \quad B = \text{اعداد بر ۷ بخش پذیر}$$

-۱۳

$$P(A \cap B' \cap C') = P(A \cap (B \cup C)') = P(A) - P(A \cap (B \cup C)) =$$

$$P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C),$$

$$P(A) = \left[\frac{1000}{4} \right] = 250, \quad P(A \cap B) = \left[\frac{1000}{20} \right] = 50, \quad P(A \cap C) = \left[\frac{1000}{28} \right] = 35$$

$$P(A \cap B \cap C) = \left[\frac{1000}{140} \right] = 7 \Rightarrow P(A \cap B' \cap C') = \frac{250 - 50 - 35 + 7}{1000} = \frac{172}{1000} = \frac{43}{250}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}, P(A \cup B) = \frac{4}{4} = 1$$

۱۴- الف)

$$P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \neq 1$$

$$A \cap B = \{2, 3\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{3}{4}$$

ب)

$$P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B) \Rightarrow \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \neq \frac{1}{2}$$

۱۵- تعداد افراد نه مرد و نه عمل جراحی (زن بستری شده برای غیر جراحی)

جنس	تعداد	مرد	زن
جراحی	۲۰	۸	۱۲
غیر جراحی	۲۳	۱۸	۵
	۴۳	۲۶	۱۷

۱۸ نفر است .

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \Leftrightarrow$$

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$

$$P(A) + P(B) + P(C) \Leftrightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) + 2P(A \cap B \cap C) \Leftrightarrow$$

۱۶-

$$P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = -P(A \cap B \cap C) \Rightarrow$$

$$P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0$$

از این مطلب استفاده شده که $P(A \cup B) = 0 \Leftrightarrow P(A) = P(B) = 0$

۱۷- می دانیم $P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$ پس

$$P(A \cap (B \cap C)) \leq P(A) + P(B \cap C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

$$P(2) : P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) \quad \checkmark$$

۱۸-

$$P(k) : P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \leq P(A_1) + \dots + P(A_k)$$

$$P(k+1) : P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1}) \leq P(A_1) + \dots + P(A_{k+1})$$

اثبات $P(k+1)$:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1}) \leq P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) + P(A_{k+1}) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_{k+1})$$