فهرست مطالب :

۱-
$$a=۵,d=۸-۵=۳,s_n>۵۰۰$$
$$s_n=\frac{n}{۲}\left(۲a+(n-۱)d\right)\Rightarrow\frac{n}{۲}\left(۱۰+(n-۱)۳\right)>۵۰۰\Rightarrow\frac{n}{۲}(۳n+۷)>۵۰۰$$
$$\Rightarrow ۳n^{۲}+۷n-۱۰۰۰>۰\Rightarrow\left(n>\frac{-۷+\sqrt{۱۲۰۴۹}}{۶}\ or\ n<\frac{-۷-\sqrt{۱۲۰۴۹}}{۶}\right)\Rightarrow n\geq ۱۸$$

۲- سمت چپ تساوی مجموع تعداد دوایر قرمز به شکل ـــ| است و سمت راست تساوی مساحت مربع به طول n ، که طبق شکل این دو با هم برابرند.

۳- چون هزار میلیارد تن برابر است با $۱۰^{۱۸}$ گرم بنابراین

$$a=۱,q=۲,n=۶۴,S_n=a\left(\frac{۱-q^n}{۱-q}\right)\Rightarrow ۱\left(\frac{۱-۲^{۶۴}}{۱-۲}\right)=S_{۶۴}$$
$$\Rightarrow S_{۶۴}=۲^{۶۴}-۱>۲^{۶۳}=(۲^{۷})^{۹}>۱۰۰^{۹}=۱۰^{۱۸}$$

۴-
$$a=۱۰۰۰\quad q=۰/۹\quad n=۵۰\Rightarrow S_{۵۰}=۱۰۰۰\left(\frac{۱-۰/۹^{۵۰}}{۱-۰/۹}\right)\Rightarrow$$
$$S_{۵۰}=۱۰^{۴}(۱-۰/۹^{۵۰})\approx ۱۰^{۴}(۱-۰/۰۰۵)=۱۰^{۴}(۰/۹۵۵)=۹۵۵۰\quad\Rightarrow$$
$$۱-q^n<۱\Rightarrow S_n<\frac{۱۰۰۰}{۱-۰/۹}=\frac{۱۰۰۰}{۰/۱}=۱۰۰۰۰$$

۵-
$$q=\frac{۱}{۲}\ ,a_n\leq\frac{۱}{۱۰۰}a\ ,a_n=aq^{n-۱}=a\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}\leq\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow ۲^n\geq ۱۰۰>۲^{۶}$$
$$\Rightarrow n>۶\Rightarrow n\geq ۷\Rightarrow n_۰=۷$$

۶-
$$p,\frac{۱}{۲}p,\frac{۱}{۴}p,...\Rightarrow S_n=\frac{p}{۱-\frac{۱}{۲}}=۲p\ ,\ S,\frac{۱}{۴}S,\frac{۱}{۱۶}S,...\Rightarrow S'_n=\frac{S}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{۴}{۳}S$$

۱- الف)

$$p(x)=x^{۲}+ax+b\ ,\begin{cases} p(۱)=۰\Rightarrow ۱^{۲}+a(۱)+b=۰\Rightarrow a+b=-۱ \\ p(۲)=۰\Rightarrow ۲^{۲}+a(۲)+b=۰\Rightarrow ۲a+b=-۴ \\ \Rightarrow a=-۳\ ,\ b=۲\ ,\Rightarrow p(x)=x^{۲}-۳x+۲ \end{cases}$$

ب)

$$\left\{\begin{array}{l} p(۰)=۰\Rightarrow ۰^{۲}+a(۰)+b=۰\Rightarrow b=۰ \\ \\ p(۱)=۱\Rightarrow ۱^{۲}+a(۱)+b=۱\Rightarrow a=۰ \end{array}\right. \Rightarrow p(x)=x^{۲}$$

ج)

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} p(-۱)=۲\Rightarrow (-۱)^{۲}+a(-۱)+b=۲\Rightarrow -a+b=۱ \\ p(۲)=-۱\Rightarrow (۲)^{۲}+a(۲)+b=-۱\Rightarrow ۲a+b=-۵ \end{array}\right\}\Rightarrow ۳a=-۶\Rightarrow a=-۲ \\ \Rightarrow ۲+b=۱\Rightarrow b=-۱\Rightarrow p(x)=x^{۲}-۲x-۱ \end{cases}$$

۲-

$$۲x+۱=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow p\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۰\Rightarrow \left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۳}-m\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۴=۰$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۸}-\frac{m}{۴}+\frac{۱}{۲}+۴=۰\Rightarrow -\frac{m}{۴}=-\frac{۳۵}{۸}\Rightarrow m=\frac{۳۵}{۲}$$

۳-

$$\begin{cases} x-۱=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow p(۱)=۴\Rightarrow ۱^{۳}+a(۱)^{۲}+۱+b=۴\Rightarrow a+b=۲ \\ x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\Rightarrow p(-۲)=۰\Rightarrow (-۲)^{۳}+a(-۲)^{۲}+(-۲)+b=۰\Rightarrow ۴a+b=۱۰ \end{cases}$$

$$۳a=۸\Rightarrow a=\frac{۸}{۳}\ ,\ \frac{۸}{۳}+b=۲\Rightarrow b=-\frac{۲}{۳}$$

۴-

$$x^{۲}-۵x+۶=۰\Rightarrow x=۲\vee x=۳\Rightarrow p(۲)=۰\ ,p(۳)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases} ۲^{۴}-۳(۲)^{۳}+m(۲)+n=۰\Rightarrow ۲m+n=۸ \\ ۳^{۴}-۳(۳)^{۳}+m(۳)+n=۰\Rightarrow ۳m+n=۰ \end{cases}\Rightarrow m=-۸\ ,n=۲۴$$

۵-

$$\begin{array}{l|l} x^{۳}+۲x^{۲}-۵x-۶ & x-۲ \\ \cline{2-2} \pm x^{۳}\mp ۲x^{۲} & x^{۲}+۴x+۳ \\ \hline \quad ۴x^{۲}-۵x & \\ \quad \pm ۴x^{۲}\mp ۸x & \\ \hline \qquad ۳x-۶ & \\ \qquad \pm ۳x \mp ۶ & \\ \hline \qquad\quad ۰ & \end{array}$$

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\,,\quad f(۲)=۲^{۳}+۲(۲)^{۲}-۵(۲)-۶=۸+۸-۱۰-۶=۰$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-۲)(x^{۲}+۴x+۳)=(x-۲)(x+۱)(x+۳)=۰$$

$$\Rightarrow x=۲ \;\; or \;\; x=-۱ \;\; or \;\; x=-۳$$

۶-

$$x=۲\;,\; p(۲)=۰\Rightarrow ۲^{۳}-۲(۲)^{۲}+a(۲)+۲=۰\Rightarrow ۲a=-۲\Rightarrow a=-۱$$

$$\Rightarrow p(x)=x^{۳}-۲x^{۲}-x+۲=x^{۲}(x-۲)-(x-۲)=(x^{۲}-۱)(x-۲)$$

$$\Rightarrow p(x)=(x-۱)(x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۱ \;\; or \;\; x=-۱ \;\; or \;\; x=۲$$

۷-

الف)

$$(۱-x)^{۷}=(۱)^{۷}-۷(۱)^{۶}(x)+۲۱(۱)^{۵}(x)^{۲}-۳۵(۱)^{۴}(x)^{۳}+۳۵(۱)^{۳}(x)^{۴}$$
$$-۲۱(۱)^{۲}(x)^{۵}+۷(۱)(x)^{۶}-(x)^{۷}=۱-۷x+۲۱x^{۲}-۳۵x^{۳}+۳۵x^{۴}-۲۱x^{۵}+۷x^{۶}-x^{۷}$$

ب)

$$(۱+\frac{۲}{x})^{۶}=(۱)^{۶}+۶(۱)^{۵}(\frac{۲}{x})+۱۵(۱)^{۴}(\frac{۲}{x})^{۲}+۲۰(۱)^{۳}(\frac{۲}{x})^{۳}+۱۵(۱)^{۲}(\frac{۲}{x})^{۴}+$$
$$۶(۱)(\frac{۲}{x})^{۵}+(\frac{۲}{x})^{۶}=۱+\frac{۱۲}{x}+\frac{۶۰}{x^{۲}}+\frac{۱۶۰}{x^{۳}}+\frac{۲۴۰}{x^{۴}}+\frac{۱۹۲}{x^{۵}}+\frac{۶۴}{x^{۶}}$$

ج)

$$(۲x-۳y)^{۴}=(۲x)^{۴}-۴(۲x)^{۳}(۳y)+۶(۲x)^{۲}(۳y)^{۲}-۴(۲x)(۳y)^{۳}-(۳y)^{۴}$$
$$=۱۶x^{۴}-۹۶x^{۳}y+۲۱۶x^{۲}y^{۲}-۲۱۶xy^{۳}+۸۱y^{۴}$$

۸- جملات $(۲-\sqrt{۳})^n$ به شکل $i=۰,۱,۲,...,n$, $(-۱)^i\binom{n}{i}(۲)^{n-i}(\sqrt{۳})^i$ است.

به ازای i زوج این جملات صحیح مثبت و به ازای i فرد این جملات منفی و ضریبی صحیح از $\sqrt{۳}$ است و تنهاتفاوت با $(۲+\sqrt{۳})^n$ ، منفی بودن ضریب $\sqrt{۳}$ است پس

$(۲-\sqrt{۳})^n=۳۶۲-b\sqrt{۳}$.

$$(۲+\sqrt{۳})^n(۲-\sqrt{۳})^n=(۳۶۲+b\sqrt{۳})(۳۶۲-b\sqrt{۳})\Rightarrow(۴-۳)^n=۳۶۲^۲-۳b^۲$$

$$\Rightarrow b^۲=\frac{۳۶۲^۲-۱}{۳}=\frac{۳۶۱\times۳۶۳}{۳}=۳۶۱\times۱۲۱\Rightarrow b=۱۹\times۱۱=۲۰۹$$

---

۹ -

$$A=x^۹-x^۳y^۳=x^۳(x^۶-y^۳)=x^۳(x^۲-y)(x^۴+x^۲y+y^۲)$$
$$B=(a^۶+۱)^۲-(a^۶-۱)^۲=(a^۶+۱-a^۶+۱)(a^۶+۱+a^۶-۱)=۲a^۶(۲)=۴a^۶$$

---

۱۰ — استقرا بر روی توان دو جمله ای ،

$$k=۱\Rightarrow ۱-x^۲=(۱+x)(۱-x)\ \boxed{\checkmark}$$

فرض $P(k):۱-x^{۲k}=(۱+x)(۱-x+...-x^{۲k-۱})$

حکم $P(k+۱):۱-x^{۲k+۲}=(۱+x)(۱-x+...-x^{۲k+۱})$

اثبات)

$$(۱+x)(۱-x+...-x^{۲k-۱}+x^{۲k}-x^{۲k+۱})=$$
$$(۱+x)(۱-x+...-x^{۲k-۱})+(۱+x)(x^{۲k}-x^{۲k+۱})=$$
$$(۱-x^{۲k})+(x^{۲k}-x^{۲k+۱}+x^{۲k+۱}-x^{۲k+۲})=۱-x^{۲k+۲}$$

۱- ک م م سه عدد ۱۸ و ۲٤ و ۳۲ برابر است

$$\begin{cases} ۱۸ = ۲\times ۳^۲ \\ ۲۴ = ۲^۳ \times ۳ \\ ۳۲ = ۲^۵ \end{cases} \qquad ۲۸۸ = ۲^۵ \times ۳^۲$$

۲-

$$\begin{cases} ۱,۵,۹,\ldots \Rightarrow a_n = ۱+(n-۱)۴ = ۴n-۳ \\ ۴,۷,۱۰,\ldots \Rightarrow a_m = ۴+(m-۱)۳ = ۳m+۱ \end{cases} \Rightarrow ۳m+۱ = ۴n-۳$$

$$\Rightarrow ۳m = ۴n-۴ = ۴(n-۱) \Rightarrow \begin{cases} m = ۴k \\ n-۱ = ۳k \Rightarrow n = ۳k+۱ \end{cases} \Rightarrow a_n = a_m = ۱۲k+۱$$

$$,\quad ۱۰۰ < ۱۲k+۱ < ۹۹۹ \Rightarrow ۹۹ < ۱۲k < ۹۹۸ \Rightarrow \frac{۹۹}{۱۲} < k < \frac{۹۹۸}{۱۲} \Rightarrow$$

$$۸/۲۵ < k < ۸۳/۱ \Rightarrow ۹ \le k \le ۸۳ \Rightarrow Teadad = ۸۳-۹+۱ = ۷۵$$

۷۵ جمله وجود دارد .

۳- ب م م سه عدد ۷۲,۴۰,۴۸ برابر است با ۸ که حداکثر حجم شیشه است و

$$\begin{cases} ۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲ \\ ۴۰ = ۲^۳ \times ۵ \\ ۴۸ = ۲^۴ \times ۳ \end{cases} \qquad \frac{(۴۸+۴۰+۷۲)}{۸} = ۲۰$$

پس تعداد ۲۰ بطری ۸ لیتری لازم است .

٤-

الف) $\dfrac{(x-۱)(x-۴)}{x(x-۴)} \times \dfrac{x^۲(x+۲)}{(x+۲)(x-۱)} = x$

ب) $\dfrac{(x-۳)(x+۱)}{(x-۳)(x+۳)} \times \dfrac{(x-۳)(x-۷)}{(x-۷)(x+۱)} = \dfrac{x-۳}{x+۳}$

ج) $\dfrac{۱}{(a-۱)(a+۱)} + \dfrac{۲a}{(a+۱)^۲} - \dfrac{۲}{a+۱} = \dfrac{۱(a+۱)+۲a(a-۱)-۲(a-۱)(a+۱)}{(a-۱)(a+۱)^۲}$

$$= \frac{a+۱+۲a^۲-۲a-۲a^۲+۲}{(a-۱)(a+۱)^۲} = \frac{-a+۳}{(a-۱)(a+۱)^۲}$$

د) $\dfrac{x+۱}{x-۱} + \dfrac{۱}{x+۳} - \dfrac{۸}{(x+۳)(x-۱)} = \dfrac{(x+۱)(x+۳)+۱(x-۱)-۸(۱)}{(x+۳)(x-۱)} =$

$$\frac{x^۲+۴x+۳+x-۱-۸}{(x+۳)(x-۱)} = \frac{x^۲+۵x-۶}{(x+۳)(x-۱)} = \frac{(x+۶)(x-۱)}{(x+۳)(x-۱)} = \frac{x+۶}{x+۳}$$

۱-
$$\alpha=\beta+۲ ، \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۴ ، \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{m}{۲}$$
$$\Rightarrow\beta+۲+\beta=۴\Rightarrow ۲\beta=۲\Rightarrow\beta=۱ ، \alpha=۱+۲=۳\Rightarrow ۳\times۱=\frac{m}{۲}\Rightarrow m=۶$$

۲- الف) $f(x)=۰\Rightarrow x(x^۲-۴)=۰\Rightarrow x=۰$ یا $x=\pm ۲$

ب)
$$q(x)=۰\Rightarrow (x+\frac{۱}{x})(x+\frac{۱}{x}+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{۱}{x}=۰\Rightarrow x^۲+۱=۰\\ x+\frac{۱}{x}=-۱\Rightarrow x^۲+x+۱=۰\end{cases}$$

که درهردو معادله جواب وجود ندارد.(چون $\Delta<۰$)

۳- الف) $x(۲x^۲+x+۳)=۰\Rightarrow x=۰$ یا $۲x^۲+x+۳=۰$

معادله دوم جواب ندارد چون $\Delta=-۲۳<۰$ پس تنها جواب $x=۰$ است.

ب) $۹x^۲-۳۳+۱۴۸-۴x^۲=۲۴۰\Rightarrow ۵x^۲=۱۲۵\Rightarrow x^۲=۲۵\Rightarrow x=\pm ۵$

۴- الف)
$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{۱}{۵}+\frac{۴}{۵}=۱\\ \alpha\beta=\frac{۱}{۵}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۴}{۲۵}\end{cases}\Rightarrow x^۲-۱x+\frac{۴}{۲۵}=۰\Rightarrow ۲۵x^۲-۲۵x+۴=۰$$

ب)
$$\begin{cases}\alpha+\beta=۱+\sqrt{۳}+۱-\sqrt{۳}=۲\\ \alpha\beta=(۱+\sqrt{۳})(۱-\sqrt{۳})=۱-۳=-۲\end{cases}\Rightarrow x^۲-۲x-۲=۰$$

-۵ الف)
$$f(x)=۹x^۲+۶x+۳ \ ، \ a=۹>۰ \Rightarrow x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۶}{۱۸}=-\frac{۱}{۳}$$
$$\Rightarrow y_{\min}=۹(-\frac{۱}{۳})^۲+۶(-\frac{۱}{۳})+۳=۱-۲+۳=۲$$

ب)
$$f(x)=۴+۸x-x^۲ \ ، \ a=-۱<۰ \Rightarrow x=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۸}{-۲}=۴$$
$$\Rightarrow y_{\max}=۴+۸(۴)-۴^۲=۲۰$$

-۶
$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۵}{۴}\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۵}{۴}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\frac{۵}{۴}}{-\frac{۵}{۴}}=-۱\\ \frac{۱}{\alpha}\times\frac{۱}{\beta}=\frac{۱}{\alpha\beta}=\frac{۱}{-\frac{۵}{۴}}=-\frac{۴}{۵}\end{cases} \Rightarrow x^۲+x-\frac{۴}{۵}=۰ \Rightarrow ۵x^۲+۵x-۴=۰$$

-۷
$$\Delta=b^۲-۴ac=۴۹+۱۰۰=۱۴۹>۰$$
$$S=-\frac{b}{a}=\frac{۷}{۵}>۰ \qquad P=\frac{c}{a}=\frac{-۵}{۵}=-۱<۰$$

معادله دارای دو ریشه مختلف العلامه است که عدد مثبت از نظر قدر مطلق از دیگری بزرگتر است.

-۸ x = سن فعلی ، $(x+۲۱)=(x-۲۱)^۲ \Rightarrow x^۲-۴۲x+۴۴۱=x+۲۱$

$\Rightarrow x^۲-۴۳x+۴۲۰=۰ \Rightarrow x=۱۵$ یا $x=۲۸ \Leftarrow$ سن معلم

-۹
$$(\frac{x}{۳}+۱)(\frac{x}{۴}+۱)=۲۰ \Rightarrow (x+۳)(x+۴)=۲۴۰ \Rightarrow x+۳=۱۵ \Rightarrow x=۱۲$$

۱۰-
$$\begin{cases} x=y+۱۰ \\ xy-۴۰=۳۹y+۲۲ \end{cases} \Rightarrow (y+۱۰)y-۴۰=۳۹y+۲۲ \Rightarrow y^۲+۱۰y-۴۰=۳۹y+۲۲$$
$$\Rightarrow y^۲-۲۹y-۶۲=۰ \Rightarrow (y-۳۱)(y+۲)=۰ \overset{y\oplus}{\Longrightarrow} y=۳۱ ، x=۳۱+۱۰=۴۱$$

۱۱-

الف) $$(x^۲-۲)(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲} \\ \text{یا} \\ x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm ۱ \end{cases}$$

ب) $$(\frac{x^۲}{۳}-۲-۶)(\frac{x^۲}{۳}-۲-۱)=۰ \Rightarrow x^۲=۲۴ \text{ یا } x^۲=۹ \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{۲۴}=\pm۲\sqrt{۶} \\ \text{یا} \\ x=\pm\sqrt{۹}=\pm۳ \end{cases}$$

ج) $$(۴-x^۲-۵)(۴-x^۲+۳)=۰ \Rightarrow (-x^۲-۱)(۷-x^۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲=-۱ \quad \times \\ \text{یا} \\ x^۲=۷ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۷} \end{cases}$$

۱۲-
$$f(x)=x+\frac{۲}{x}=\frac{x^۲+۲}{x}=\frac{x^۲-۲\sqrt{۲}x+۲+۲\sqrt{۲}x}{x}=\frac{(x-\sqrt{۲})^۲}{x}+۲\sqrt{۲}$$

به ازای مقادیر مثبت x کمترین مقدار $\frac{(x-\sqrt{۲})^۲}{x}$ برابرصفراست که از $x=\sqrt{۲}$ حاصل می شود ،

در این صورت : $y_{\min}=۲\sqrt{۲}$

۱۳-

الف)

$$\begin{cases} P(-۲)=-۲ \Rightarrow a(-۲)^{۲}+b(-۲)+c=-۲ \Rightarrow ۴a-۲b+c=-۲ \\ P(۰)=۰ \Rightarrow a(۰)^{۲}+b(۰)+c=۰ \Rightarrow c=۰ \\ P(۴)=۰ \Rightarrow a(۴)^{۲}+b(۴)+c=۰ \Rightarrow ۴a+b=۰ \end{cases}$$

x		۰		۴	
$p(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a-b=-۱ \\ ۴a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۶} \text{ ، } b=\frac{۲}{۳} \Rightarrow$$

ب)

$$\begin{cases} P(۰)=۳ \Rightarrow a(۰)^{۲}+b(۰)+c=۳ \Rightarrow c=۳ \\ x_{\min}=-\frac{b}{۲a}=-۴ \Rightarrow b=۸a \\ P(-۴)=-۲ \Rightarrow a(-۴)^{۲}+b(-۴)+۳=-۲ \Rightarrow ۱۶a-۴b=-۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=۸a \\ ۱۶a-۴b=-۵ \end{cases} \Rightarrow ۱۶a-۳۲a=-۵ \Rightarrow a=\frac{۵}{۱۶}, b=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow P(x)=\frac{۵}{۱۶}x^{۲}+\frac{۵}{۲}x+۳=۰ \Rightarrow ۵x^{۲}+۴۰x+۴۸=۰ \Rightarrow x=\frac{-۲۰\pm۴\sqrt{۱۰}}{۵}$$

اگر $\frac{-۲۰-۴\sqrt{۱۰}}{۵}<x<\frac{-۲۰+۴\sqrt{۱۰}}{۵}$ مقدار $P(x)$ منفی و در خارج این بازه مثبت است

ودر $x=\frac{-۲۰\pm۴\sqrt{۱۰}}{۵}$ برابر صفر است .

ج)

$$\begin{cases} P(۰)=۰ \Rightarrow a(۰)^{۲}+b(۰)+c=۰ \Rightarrow c=۰ \\ x=-\frac{b}{۲a}=۰ \Rightarrow b=۰ \\ P(۱)=۱ \Rightarrow a(۱)^{۲}+b(۱)+c=۱ \Rightarrow a+b=۱ \Rightarrow a=۱ \end{cases}$$

پس $P(x)=x^{۲}$ که در $x=۰$ برابر صفر ودر $x\neq۰$ مثبت است.

---

۱۴ - x طول و y عرض

$$\begin{cases} ۲(x+y)=۱۸ \Rightarrow x+y=۹ \Rightarrow y=۹-x \\ xy=۱۴ \Rightarrow x(۹-x)=۱۴ \Rightarrow x^{۲}-۹x+۱۴=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۷)=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۲ \Rightarrow y=۹-۲=۷ \\ x=۷ \Rightarrow y=۹-۷=۲ \end{cases}$$

۱- ک.م.م $= p(p+1)$

$$\frac{6}{p}=2+\frac{p}{p+1}\Rightarrow 6(p+1)=2p(p+1)+p(p)\Rightarrow 3p^2-4p-6=0$$

چون فقط $p=-1$, $p=0$ مخرج را صفر می‌کنند پس ق ق $p=\frac{2\pm\sqrt{4+18}}{3}=\frac{2\pm\sqrt{22}}{3}$

---

۲ – ک.م.م $= k(2-k)$

$$k(k)+2(2-k)=5k(2-k)\Rightarrow k^2+4-2k=10k-5k^2\Rightarrow$$

$$6k^2-12k+4=0\Rightarrow 3k^2-6k+2=0\Rightarrow k=\frac{3\pm\sqrt{9-6}}{3}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$$

چون فقط $k=2$, $k=0$ مخرج را صفر میکنند دو جواب قابل قبولند.

---

۳ – ک.م.م $= (3k-1)^2$

$$2(3k-1)^2+5(3k-1)=-2\Rightarrow 18k^2-12k+2+15k-5=-2\Rightarrow$$

$$18k^2+3k-1=0\Rightarrow k=\frac{-3\pm\sqrt{81}}{36}\Rightarrow\begin{cases}k=\frac{1}{6}\\ k=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

چون فقط $k=\frac{1}{3}$ مخرج کسر را صفر می کند ، دو جواب قابل قبولند.

---

۴ – ک.م.م $= y^2+5y=y(y+5)$

$$3y+5+y(y+4)=(y+1)(y+5)\Rightarrow 3y+5+y^2+4y=y^2+6y+5\Rightarrow y=0$$

چون $y=-5$, $y=0$ مخرج کسر را صفر می‌کنند پس جواب به دست آمده قابل قبول نیست و معادله جواب ندارد.

---

۵ — ک.م.م $= m(m+2)(m-2)=m(m^2-4)$

$$3m(m-2)+2(m^2-4)=(4m-4)m \Rightarrow 3m^2-6m+2m^2-8=4m^2-4m$$

$$m^2-2m-8=0 \Rightarrow (m-4)(m+2)=0 \Rightarrow m=4 \quad or \quad m=-2$$

چون $m=\pm 2$, $m=0$ مخرج را صفر می‌کنند تنها جواب $m=4$ قابل قبول است.

---

٦ - ک.م.م $= x^2-9=(x+3)(x-3)$

$$2(x+3)-3(x-3)=12(1) \Rightarrow -x+15=12 \Rightarrow x=3$$

چون $x=\pm 3$ جوابهای مخرجند بنابراین تنها جواب به دست آمده قابل قبول نیست.

---

۷ — چون $x=-3$ جواب مخرج است بنابراین مجموعه جواب برابر $R-\{-3\}$ است.

---

۸ — n تعداد اسباب بازی و x قیمت قبل از تخفیف

$$\begin{cases} nx=12000 \\ (n+4)(x-100)=12000 \end{cases} \Rightarrow nx+4x-100n-400=12000 \Rightarrow$$

$$12000+4x-100n-400=12000 \Rightarrow 4x-100n=400 \Rightarrow x=25n+100\ ,\ nx=12000$$

$$\Rightarrow n(25n+100)=12000 \Rightarrow n(n+4)=480 \Rightarrow n^2+4n-480=0 \Rightarrow n=\frac{-2\pm\sqrt{484}}{1}$$

$$\Rightarrow n=-2\pm 22 \Rightarrow n=20 \quad or \quad n=-24$$

چون n تعداد اسباب بازی است پس $n=-24$ قابل قبول نیست پس $x=\frac{12000}{20}=600$.

۱- الف) $\sqrt{1-x^2}=x \Rightarrow 1-x^2=x^2 \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

چون $x>0$ بنابراین $x=+\frac{\sqrt{2}}{2}$ قابل قبول است.

ب) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=1-x \overset{x>0}{\Rightarrow} \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) \Rightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x}=0 \Rightarrow x=1 \\ or \\ (1+\sqrt{x})^2=1 \Rightarrow x=0 \end{cases}$

$$, \begin{cases} x=1 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}}=0=1-1 \\ x=0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{0}}{1+\sqrt{0}}=1=1-0 \end{cases}$$

ج) راه حل اول : جواب ندارد $(2+\sqrt{1+x})^2=(\sqrt{x})^2 \Rightarrow 5+x+4\sqrt{1+x}=x \Rightarrow \sqrt{1+x}=-\frac{5}{4}$

راه حل دوم : چون باید $x>0$ باید باشد پس $\sqrt{1+x}>\sqrt{x}$ بنابراین $2+\sqrt{1+x}>\sqrt{x}$

پس معادله دارای جواب نیست.

۲- عبارت صفر نمی شود $\sqrt{1-x}\ge 0\ ,\ \sqrt{2-x}\ge 0\ , 3>0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}+3>0$

---

۳ -

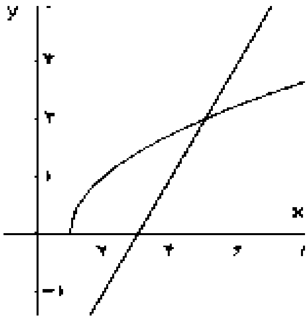
الف) $V=\sqrt{\frac{2k}{m}} \Rightarrow V^2=\frac{2k}{m} \Rightarrow k=\frac{mV^2}{2}$

ب) $F=\frac{1}{2\pi}\sqrt{LC} \Rightarrow F^2=\frac{1}{4\pi^2}(LC) \Rightarrow L=\frac{4\pi^2F^2}{C}$

ج) $I=\frac{nE}{R+nr} \Rightarrow IR=nE-nIr=n(E-Ir) \Rightarrow n=\frac{IR}{E-Ir}$

د) $\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2} \Rightarrow T_1=\frac{P_1V_1T_2}{P_2V_2}$

ه) $A=p(1+i)^2 \Rightarrow (1+i)^2=\frac{A}{p} \Rightarrow 1+i=\pm\sqrt{\frac{A}{p}} \Rightarrow i=\pm\sqrt{\frac{A}{p}}-1$



۱- الف) هندسی :

$$y=\sqrt{x-۱}\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۱ & ۲ & ۵ \\ \hline y & ۰ & ۱ & ۲ \end{array}$$

$$y=x-۳\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۲ & ۳ & ۵ \\ \hline y & -۱ & ۰ & ۲ \end{array}$$

تنها جواب $x=۵$ است .

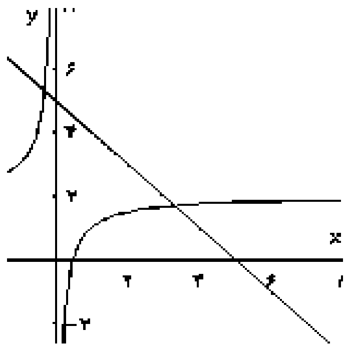
جبری :

$$x-۱=(x-۳)^۲\Rightarrow x^۲-۷x+۱۰=۰\Rightarrow x=۲ \;\; or \;\; x=۵$$

$$x=۲\Rightarrow \sqrt{۲-۱}\overset{?}{=}۲-۳ \qquad x=۵\Rightarrow \sqrt{۵-۱}\overset{?}{=}۵-۳$$

فقط تساوی دوم درست است پس تنها $x=۵$ قابل قبول است.

ب) هندسی : نمودار $y=\dfrac{۲x-۱}{x}$ در دو سمت خط $x=۰$ دارای دو شاخه است .



$$y=\frac{۲x-۱}{x}\Rightarrow \begin{array}{c|cccccc} x & -۳ & -۱ & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۳ \\ \hline y & \frac{۷}{۳} & ۳ & ۴ & ۰ & ۱ & \frac{۵}{۳} \end{array}$$

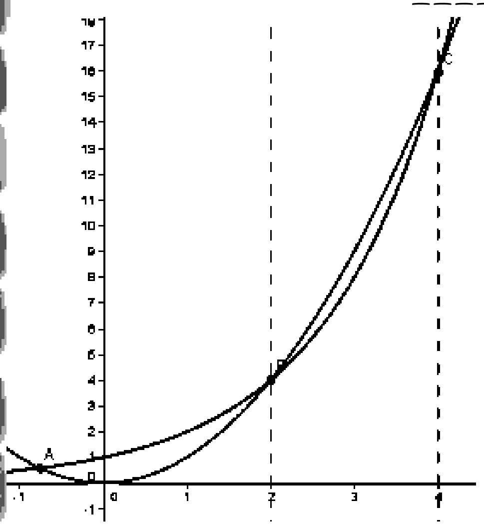
$$y=۵-x\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۵ & ۰ & ۲ \\ \hline y & ۰ & ۵ & ۳ \end{array}$$

با توجه به نمودار $x=۳/۵$, $x=-۰/۲۵$ دو جواب تقریبی اند.

جبری :

$$\frac{۲x-۱}{x}=۵-x\Rightarrow x^۲-۳x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۳\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

$x=۰$ مخرج کسر را صفرمیکند پس هردو جواب به دست آمده قابل قبولند.



ج) هندسی :

$$y=۲^x\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline y & ۱ & ۲ & ۴ & ۸ \end{array}$$

$$y=x^۲\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -۱ & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۱ & ۰ & ۱ & ۴ \end{array}$$

با توجه به نمودار و آزمون و خطا

$x=۴$, $x=۲$, $x\approx -۰/۷۵$ سه جواب اند.

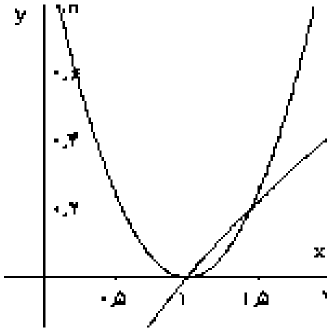
جبری : ×

د) هندسی :

$$\sqrt{x}+۲x=x^۲+۲ \Rightarrow \sqrt{x}-۱=(x-۱)^۲$$

$$y=\sqrt{x}-۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & ۰ & ۱ & ۴ & ۹ \\ \hline y & -۱ & ۰ & ۱ & ۲ \end{array}$$

$$y=(x-۱)^۲ \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline y & ۱ & ۰ & ۱ & ۴ \end{array}$$



با توجه به شکل دو جواب $x=۱/۴$, $x=۱$ وجود دارد.

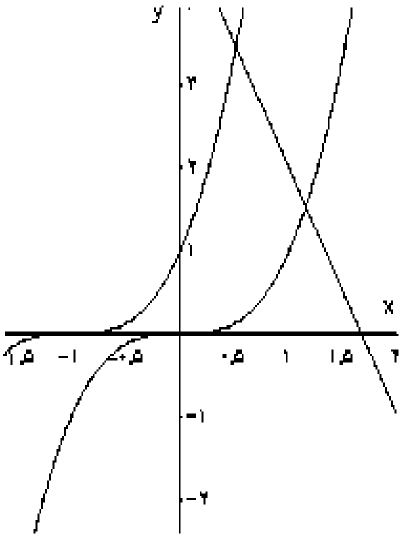
جبری : ×

---

۲ –

$$y=x^۳ \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -۱ & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline y & -۱ & ۰ & ۱ & ۸ \end{array}$$

$$y=-۳x+۵ \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & ۰ & ۱ & ۱/۵ & ۲ \\ \hline y & ۵ & ۲ & ۰/۵ & -۱ \end{array}$$



طول محل برخورد نمودار آبی و سیاه تقریبا $x=۰/۵$ است .

۱-
$$(-a)^{۲}=(a)^{۲}=a^{۲}\Rightarrow\sqrt{(-a)^{۲}}=\sqrt{(a)^{۲}}\Rightarrow|-a|=|a|$$
$$|a|^{۲}=|a|\times|a|=|a\times a|=|a^{۲}|=a^{۲}\quad(a^{۲}\geq ۰)$$

۲- می دانیم $|a|\leq c\ ,\ c\geq ۰\Rightarrow -c\leq a\leq c$ پس $|a|\leq|a|\Rightarrow -|a|\leq a\leq|a|$

۳-
$$\left.\begin{matrix}-|a|\leq a\leq|a|\\ -|b|\leq b\leq|b|\end{matrix}\right\}\Rightarrow -(|a|+|b|)=-|a|-|b|\leq a+b\leq|a|+|b|\Rightarrow|a+b|\leq|a|+|b|$$

۴- $|y|=|x+y-x|\leq|x|+|y-x|\Rightarrow|y|\leq|x|+|y-x|\Rightarrow|y|-|x|\leq|y-x|$

۵-
$$|a|>c\Rightarrow a^{۲}>c^{۲}\Rightarrow a^{۲}-c^{۲}=(a-c)(a+c)>۰$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a-c>۰\ ,\ a+c>۰\Rightarrow a>c\ ,\ a>-c\Rightarrow a>c\\ \qquad or\\ a-c<۰\ ,\ a+c<۰\Rightarrow a<c\ ,\ a<-c\Rightarrow a<-c\end{cases}$$

توضیح : برای برقراری شرط $a>c\ ,\ a>-c$ با توجه به آنکه c مثبت است کافیست $a>c$.

۶-

الف) $f(x)=x|x|=\begin{cases}x(x)=x^{۲} & x\geq ۰\\ x(-x)=-x^{۲} & x<۰\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}x+۱-۲=x-۱ & x\geq ۰\\ -x-۱-۲=-x-۳ & x<۰\end{cases}$

ج) $x-۱=۰\Rightarrow x=۱\quad,\quad x+۲=۰\Rightarrow x=-۲$

x		-۲		۱	
$x-۱$	$-$		$-$	۰	$+$
$x+۲$	$-$	۰	$+$		$+$

$$\begin{cases}x<-۲\Rightarrow y=-(x-۱+x+۲)=-۲x-۱\\ -۲\leq x\leq ۱\Rightarrow y=-x+۱+x+۲=۳\\ x>۱\Rightarrow y=x-۱+x+۲=۲x+۱\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}-۲x-۱ & x<-۲\\ ۳ & -۲\leq x\leq ۱\\ ۲x+۱ & x>۱\end{cases}$$

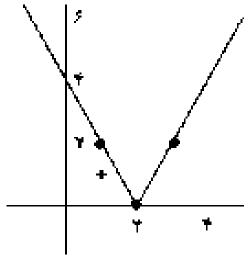
۱-

الف) $|۲t-۱|=۳ \Rightarrow ۲t-۱=\pm۳ \Rightarrow t=۲ \quad or \quad t=-۱$

ب) $|y^۲-۲|=۷ \Rightarrow y^۲-۲=\pm۷ \Rightarrow \begin{cases} y^۲=۹ \Rightarrow y=\pm۳ \\ y^۲=-۵ \qquad \times \end{cases}$

ج) $|۲x-۳|=-(۲x-۳) \Rightarrow ۲x-۳\le۰ \Rightarrow x\le\frac{۳}{۲}$

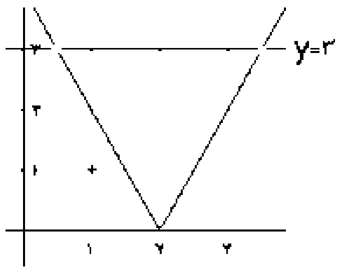
۲-



الف) $۲x-۴=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline y & ۲ & ۰ & ۲ \end{array} \Rightarrow$

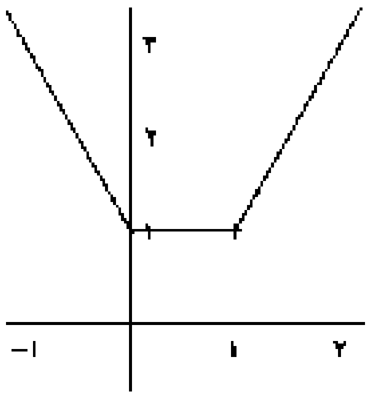
جبری $|۲x-۴|=۳ \Rightarrow ۲x-۴=\pm۳ \Rightarrow x=\frac{۷}{۲} \quad or \quad x=\frac{۱}{۲}$

رسی



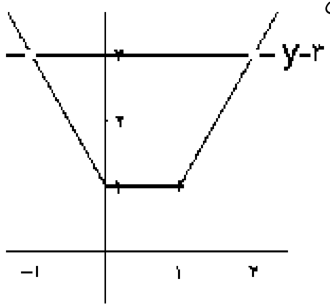
ب)

$$y=|x|+|۱-x|=\begin{cases} -x+۱-x=۱-۲x & x<۰ \\ x+۱-x=۱ & ۰\le x\le۱ \\ x-۱+x=۲x-۱ & x>۱ \end{cases}$$

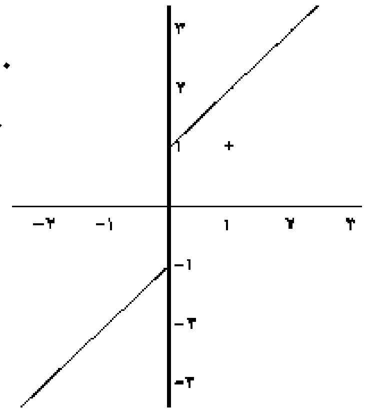


جبری $|x|+|۱-x|=۳ \Rightarrow \begin{cases} ۱-۲x=۳ \quad (if \quad x<۰) \Rightarrow x=-۱ \\ ۱=۳ \quad (if \quad ۰\le x\le۱) \\ ۲x-۱=۳ \quad (if \quad x>۱) \Rightarrow x=۲ \end{cases}$

پس جوابهای معادله $x=۲$, $x=-۱$ است



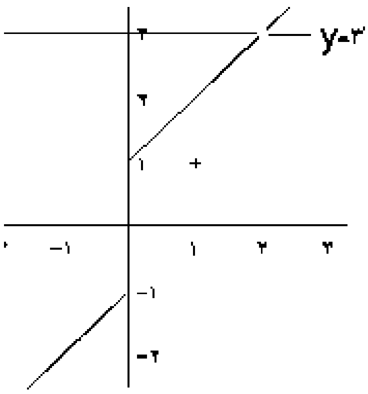
ج) $y = x + \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} x+۱ & x>۰ \\ x-۱ & x<۰ \end{cases}$



جبری $y=۳ \Rightarrow \begin{cases} x+۱=۳ \Rightarrow x=۲ \ (if \ \ x>۰) \\ x-۱=۳ \Rightarrow x=۴ \, (if \ \ x<۰) \end{cases}$

پس تنها جواب قابل قبول $x=۲$ است .

ی



۱) $x(x^2-2x+1)\ge 0 \Rightarrow x(x-1)^2 \ge 0$

ولی $(x-1)^2 \ge 0$ همواره برقرار است پس باید $x\ge 0$.

---

۲) $\dfrac{2x-1}{x}-1>0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x}>0$

ریشه های صورت و مخرج $x=1$, $x=0$ هستند پس باید $x<0$ یا $x>1$.

---

۳)
$$\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}-\frac{2}{1}\le 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-1)-x(x)-2x(x-1)}{x(x-1)}\le 0 \Rightarrow$$
$$\frac{x^2-1-x^2-2x^2+2x}{x(x-1)}\le 0 \Rightarrow \frac{-2x^2+2x-1}{x(x-1)}\le 0$$

برای صورت کسر اخیر $\Delta = 2^2-4(-2\times(-1)) = 4-8=-4<0$ پس صورت کسر همواره هم علامت a یعنی منفی است. پس مخرج باید مثبت باشد یعنی $x<0$ or $x>1$.

---

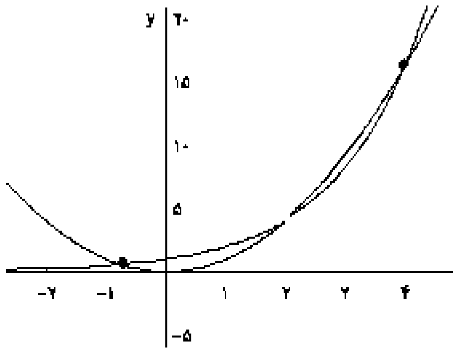
۴) $|x-2|\le x \Rightarrow x\ge 0$, $(x-2)^2 \le x^2 \Rightarrow x^2-4x+4\le x^2 \Rightarrow x\ge 1$

اشتراک دو شرط $(x\ge 0 \; , \; x\ge 1)$ برابر $x\ge 1$ است.

---

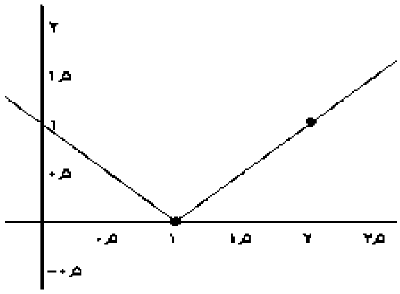
۵) آن قسمت از نمودار $y=x^2$ که زیر نمودار $y=2^x$ است را می یابیم. $-0/75\le x\le 2$ or $x\ge 4$.

یادآوری: $x=2,4,0/75$ طول محل برخورد دو نمودارند.



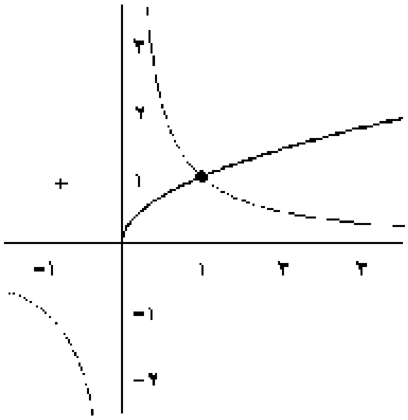
۶) $y=\sqrt{x-۱}\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۱ & ۲ & ۵ \\ \hline y & ۰ & ۱ & ۲ \end{array}$ و $y=|x-۱|\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}$

مجموعه جواب برابر $x\geq ۲$ است .



۷) $y=\frac{۱}{x}\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -۱ & -۰/۵ & ۰/۵ & ۱ \\ \hline y & -۱ & -۲ & ۲ & ۱ \end{array}$ و $y=\sqrt{x}\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۱ & ۴ \\ \hline y & ۰ & ۱ & ۲ \end{array}$

با توجه به شکل برای $x>۱$ نمودار $y=\frac{۱}{x}$ زیر نمودار $y=\sqrt{x}$ قرار دارد.



---

۸) $x+۱<|x|\Rightarrow (x+۱)^{۲}<x^{۲}\Rightarrow$

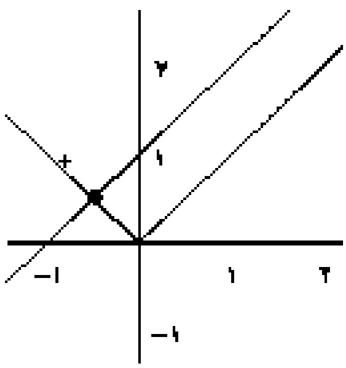
$x^{۲}+۲x+۱<x^{۲}\Rightarrow x<-\frac{۱}{۲}$

روش جبری :

$y=x+۱\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۱ & ۲ \end{array}$

$,\ y=|x|\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -۱ & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}$

روش هندسی :



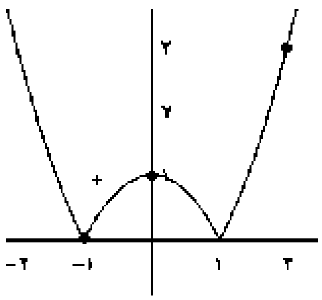
با توجه به شکل برای $x<-\frac{۱}{۲}$ نمودار خطی(قرمز)پایین نمودارقدر مطلق(آبی) است.

۹) $|x^2-1| \le |x+1| \Rightarrow |x+1|\times|x-1| \le |x+1| \Rightarrow \begin{cases} |x+1|=0 \Rightarrow x=-1 \\ or \\ |x-1|\le 1 \Rightarrow -1\le x-1\le 1 \Rightarrow 0\le x\le 2 \end{cases}$

پس مجموعه جواب برابر $[0\,,\,2]\cup\{-1\}$ است .

هندسی :

$$y=|x^2-1| \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}$$



$$y=|x+1| \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -2 & -1 & 0 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

در بازه $[0,2]$ نمودار $y=|x^2-1|$ زیر نمودار $y=|x+1|$ است.

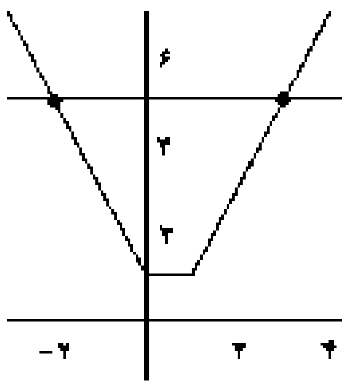
البته برای علامت تساوی نقاط تقاطع دیگر یعنی $x=-1$ نیز جواب است.

---

۱۰) جبری :

$$|x|+|x-1|=\begin{cases} -x-x+1 & x<0 \\ x-x+1 & 0\le x\le 1 \\ x+x-1 & x>1 \end{cases}=\begin{cases} -2x+1 & x<0 \\ 1 & 0\le x\le 1 \\ 2x-1 & x>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<0\ ,\ -2x+1\le 5 \Rightarrow x\ge -2 \Rightarrow -2\le x<0 \\ 0\le x\le 1\ ,\ 1\le 5 \Rightarrow 0\le x\le 1 \\ x>1\ ,\ 2x-1\le 5 \Rightarrow x\le 3 \Rightarrow 1<x\le 3 \end{cases} \xrightarrow{\ \cup\ } x\in[-2,3]$$



هندسی : نمودار $y=\begin{cases} -2x+1 & x<0 \\ 1 & 0\le x\le 1 \\ 2x-1 & x>1 \end{cases}$ و $y=5$ رسم کنید.

در بازه $[-2,3]$ نمودار سیاه زیر نمودار صورتی است.

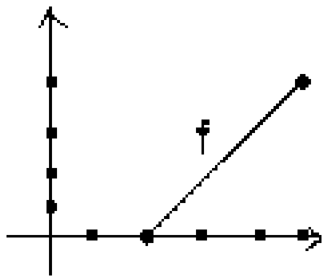
۱- برای هریک ازچهار عضو A دوانتخاب وجوددارد(p یا q)پس تعدادحالات برابر $16=2^4=2\times 2\times 2\times 2$ است .

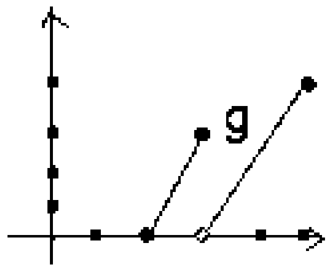
۲- برای هریک از m عضو A می توان n انتخاب داشت پس تعداد حالات $n\times n\times \ldots \times n=n^m$ است .

۳- $x\ge -2\Rightarrow x+2\ge 0\Rightarrow f(x)=\sqrt{x+2}$

۴- $f(x)=\frac{4}{3}(x-2)\quad ,\ 2\le x\le 5$

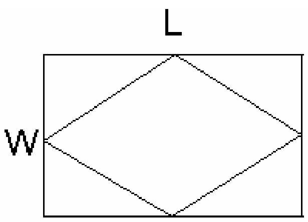
$$g(x)=\begin{cases}3x-6 & 2\le x\le 3\\ 2x-6 & 3< x\le 5\end{cases}$$





تابع f یک به یک است ولی g نیست مثلا اگر $y=1$ در اینصورت $x_1=\frac{7}{3}\ ,\ x_2=\frac{7}{2}$.

۵- مساحت لوزی نصف حاصلضرب قطرهای آن است .

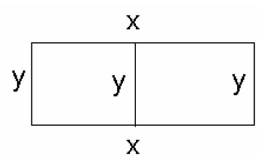


$$2(L+W)=40\Rightarrow L+W=20\Rightarrow L=20-W$$

مساحت لوزی $=f(W)=\frac{1}{2}L\times W=\frac{(20-W)W}{2}\ ,\quad 0<W<20$

۶- $x-y=12\Rightarrow x=y+12\Rightarrow xy=(y+12)y=y^2+12y=f(y)$

۷-



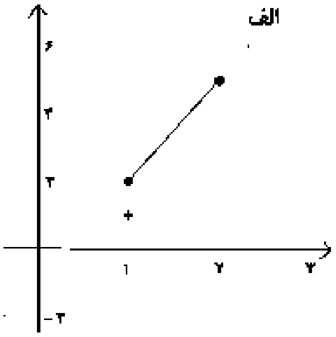
$2x+3y=150\Rightarrow x=\frac{-3y+150}{2}\ ,\ S=xy=\frac{-3y^2+150y}{2}$

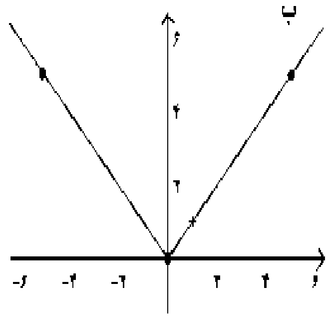
۸- الف)

x	۱	۲
y	۲	۵

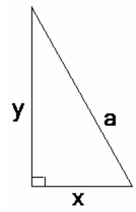
ب)

x	-۵	۰	۵
y	۵	۰	۵





۹-



$$\frac{xy}{۲}=۲۵\Rightarrow xy=۵۰\Rightarrow y=\frac{۵۰}{x}$$

$$a^{۲}=x^{۲}+y^{۲}=x^{۲}+(\frac{۵۰}{x})^{۲}\Rightarrow a(x)=\sqrt{x^{۲}+\frac{۲۵۰۰}{x^{۲}}}$$

۱۰-
$$y=-\frac{۱}{۲}(x^{۲}-۴۰x+۴۰۰)+\frac{۱}{۲}(۴۰۰)+۲۳۰=-\frac{۱}{۲}(x-۲۰)^{۲}+۴۳۰$$

راه اول) بیشترین مقدار y به ازای $x=۲۰$ حاصل می شود که برابر $y_{\max}=۴۳۰$ است .

راه دوم) $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۲۰}{۲(-\frac{۱}{۲})}=۲۰$ که به ازای آن $y_{\max}=۲۳۰+۲۰(۲۰)-\frac{۱}{۲}(۲۰^{۲})=۴۳۰$.

۱۱- الف) نادرست $f(۲x)=(۲x)^{۲}=۴x^{۲}\ ,\ ۲f(x)=۲x^{۲}\Rightarrow f(۲x)\neq ۲f(x)$

ب) درست $g(۲x)=|۲x|=|۲|\times|x|=۲|x|=۲g(x)$

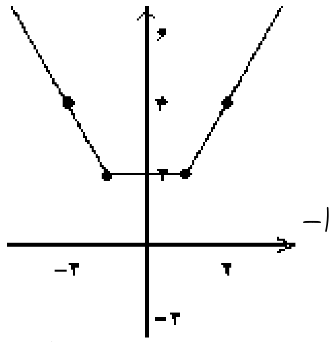
ج) نادرست $f(x+۲)=(x+۲)^{۲}=x^{۲}+۲x+۴\ ,\ f(x)+۲=x^{۲}+۲\Rightarrow f(x+۲)\neq f(x)+۲$

د) نادرست $g(x+۲)=|x+۲|\leq|x|+۲=g(x)+۲$ طبق نامساوی مثلثی

تذکر مهم برای رسم : برای رسم ، نقاط مرزی را هر چند متعلق به دامنه نباشند را در نظر گرفته و برای رسم نقطه را توخالی رسم می کنیم مثلا برای $۱ < x < ۲$, $y = x + ۱$ هرچند $x = ۱,۲$ در دامنه نیست آنها رادر نظر گرفته و هنگام رسم تو خالی می کشیم.

$$y = x+۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۲ & ۳ \end{array}$$

−۱

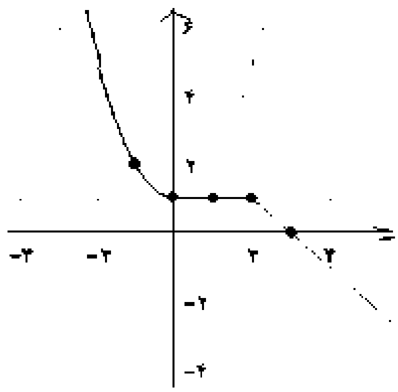


$$\begin{cases} x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ x-۱=۰ \Rightarrow x=+۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & -۱ & & ۱ & \\ \hline x+۱ & - & ۰ & + & | & + \\ \hline x-۱ & - & | & - & ۰ & + \end{array}$$

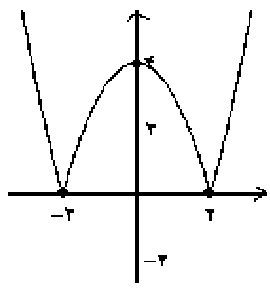
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -x-۱-x+۱ & x<-۱ \\ x+۱-x+۱ & -۱\le x\le ۱ \\ x+۱+x-۱ & x>۱ \end{cases} = \begin{cases} -۲x & x<-۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -۱ & -۲ \\ \hline y & ۲ & ۴ \end{array} \\ ۲ & -۱\le x\le ۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -۱ & ۱ \\ \hline y & ۲ & ۲ \end{array} \\ ۲x & x>۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۲ & ۴ \end{array} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_f = [۲,+\infty)$$

−۲



$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x<۰ \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -۱ & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۲ & ۱ & ۲ \end{array} \\ ۱ & ۰\le x\le ۲ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۲ \\ \hline y & ۱ & ۱ \end{array} \\ -x+۳ & x>۲ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۲ & ۳ \\ \hline y & ۱ & ۰ \end{array} \end{cases}$$



$$g(x)=\left|x^۲-۴\right| \ , \ h(x)=x^۲-۴ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -۲ & -۱ & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۰ & -۳ & -۴ & -۳ & ۰ \end{array}$$

ابتدا h را رسم و برای رسم g آن قسمت از نمودار h که زیرمحور x هاست را نسبت به محور xها قرینه می کنیم.

۳- الف)

$$y=ax+b,\begin{cases}(-۴,+۱)\in f\Rightarrow ۱=-۴a+b\\(-۲,۳)\in f\Rightarrow ۳=-۲a+b\end{cases}\Rightarrow -۲a=-۲\Rightarrow a=۱\ ,\ b=۵$$

$$y=ax+b,\begin{cases}(۱,-۱)\in f\Rightarrow -۱=a+b\\(۶,-۳)\in f\Rightarrow -۳=۶a+b\end{cases}\Rightarrow ۵a=-۲\Rightarrow a=\frac{-۲}{۵}\ ,\ b=\frac{-۳}{۵}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x+۵ & -۴\le x\le -۲\\ +۱ & -۲<x<۱\\ \frac{-۲}{۵}x+\frac{۳}{۵} & ۱\le x\end{cases}\ ,\begin{cases}D_f=[-۴,+\infty)\\R_f=(-\infty,-۱]\cup[۱,۳]\end{cases}$$

ب)

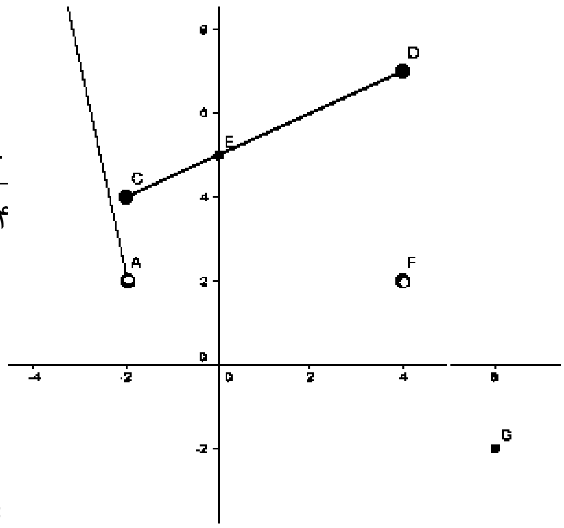
$$y=ax+b,\begin{cases}(-۳,۴)\in f\Rightarrow ۴=-۳a+b\\(-۱,-۱)\in f\Rightarrow -۱=-a+b\end{cases}\Rightarrow -۲a=۵\Rightarrow a=\frac{-۵}{۲}\ ,\ b=\frac{-۷}{۲}$$

$$y=ax+b,\begin{cases}(-۱,-۱)\in f\Rightarrow -۱=-a+b\\(۲,۲)\in f\Rightarrow ۲=۲a+b\end{cases}\Rightarrow ۳a=۳\Rightarrow a=۱\ ,\ b=۰$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{-۵}{۲}x-\frac{۷}{۲} & x\le -۱\\ x & -۱<x<۲\\ -۲ & x\ge ۲\end{cases}\ ,\begin{cases}D_f=(-\infty,+\infty)=IR\\R_f=\{-۲\}\cup[-۱,+\infty)\end{cases}$$

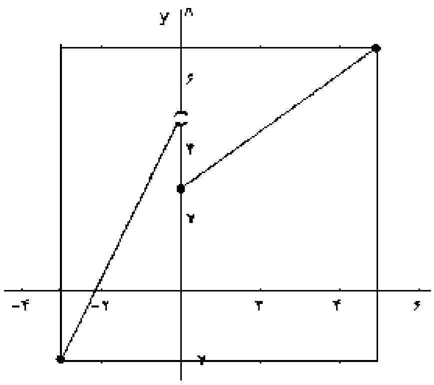
۴-

$$f(x)=\begin{cases}-۵x-۸ \quad x<-۲\Rightarrow \begin{array}{c|cc}x&-۲&-۴\\\hline y&۲&۱۲\end{array}\\ \frac{۱}{۲}x+۵ \quad -۲\le x\le ۴\Rightarrow \begin{array}{c|ccc}x&۰&۴&-\\\hline y&۵&۷&۴\end{array}\\ ۱۰-۲x \quad x>۴\Rightarrow \begin{array}{c|cc}x&۴&۶\\\hline y&۲&-۲\end{array}\end{cases}$$



$$f(۶)=۱۰-۲(۶)=-۲\ ,\ f(۴)=\frac{۱}{۲}(۴)+۵=۷$$

$$f(-۴)=-۵(-۴)-۸=۱۲\ ,\ f(۰)=\frac{۱}{۲}(۰)+۵=$$



۵-

$$y = ax+b,\begin{cases}(0,3)=(x,y)\Rightarrow 3=a(0)+b\Rightarrow b=3\\(5,7)=(x,y)\Rightarrow 7=5a+b\Rightarrow a=\dfrac{4}{5}\end{cases}$$

$$y = ax+b,\begin{cases}(0,5)=(x,y)\Rightarrow 5=a(0)+b\Rightarrow b=5\\(-3,-2)=(x,y)\Rightarrow -2=a(-3)+b\Rightarrow a=\dfrac{7}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{5}x+3 & 0\le x\le 5\\ \dfrac{7}{3}x+5 & -3\le x<0\end{cases}$$

۶- الف) $x^2+y^2=25, x=0\Rightarrow 0^2+y^2=25\Rightarrow y=\pm 5\Rightarrow$ تابع نیست

ب) $y=\begin{cases}x+3 & x\le 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$ تابع هست ، به ازای هر x در دامنه دقیقا یک y وجود دارد .

ج) $y=|x|+1$ تابع هست ، به ازای هر x در دامنه دقیقا یک y وجود دارد .

د) $x=|y|+1 \ , \ x=2\Rightarrow |y|=1\Rightarrow y=\pm 1$ تابع نیست

ه) $y^2=x^2, \ x=1\Rightarrow y^2=1\Rightarrow y=\pm 1$ تابع نیست

و) $3x+2y=12\Rightarrow y=\dfrac{12-3x}{2}$ تابع هست

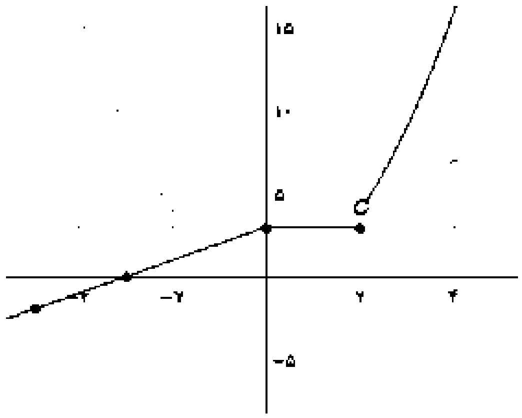
ز) $x=1\Rightarrow y=2 \ , \ y=3$ تابع نیست (در واقع به y هر مقدار دلخواه می توان داد)

۷- الف+ه) $\overset{x<0}{\Rightarrow} f(x)=ax+b,\begin{cases}f(-5)=-2\Rightarrow -5a+b=-2\\ f(-3)=0\Rightarrow -3a+b=0\end{cases}\Rightarrow a=1, b=3$

ج+الف) $\overset{0\le x\le 2}{\Rightarrow} f(x)=f(2)=3$ د) $\overset{x>2}{\Rightarrow} f(x)=x^2$

ادامه ۷-

$$f(x)=\begin{cases} x+۳ & x<۰ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -۵ & -۳ \\ \hline y & -۲ & ۰ \end{array} \\ ۳ & ۰\le x\le ۲ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۲ \\ \hline y & ۳ & ۳ \end{array} \\ x^۲ & x>۲ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۲ & ۳ \\ \hline y & ۴ & ۹ \end{array} \end{cases}$$



۸- بلی

$$D_f=D_g=R,\ f(x)=g(x)=\sqrt{x^۲}=|x| \Rightarrow f=g$$

۹-

الف) $g(x)=\sqrt{۱-Cos^۲x}=\sqrt{Sin^۲x}=|Sin\,x|\ne Sin\,x=f(x)\Rightarrow f\ne g$

ب) $f(۳)=۵,\ g(۳)=۳+۳=۶,\ f(۳)\ne g(۳)\Rightarrow f\ne g$

ج) $D_f=D_g=R,\begin{cases} x\ne ۲\Rightarrow g(x)=\dfrac{x^۲-۲x}{x-۲}=\dfrac{x(x-۲)}{x-۲}=x=f(x) \\ x=۲\Rightarrow g(۲)=۳=f(۲)\end{cases}\Rightarrow f=g$

د)

$$D_f=D_g=R\ ,\ f(x)=\frac{x^۲}{۱+\sqrt{۱+x^۲}}\times\frac{۱-\sqrt{۱+x^۲}}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}=\frac{x^۲(۱-\sqrt{۱+x^۲})}{۱-۱-x^۲}$$

$$=-۱(۱-\sqrt{۱+x^۲})=\sqrt{۱+x^۲}-۱=g(x)\Rightarrow f=g$$

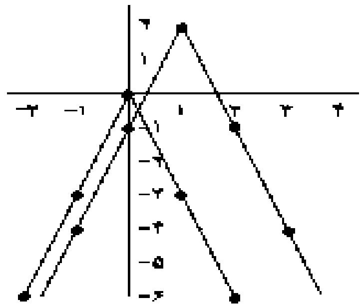
۱۰-

$$y=ax+b,\begin{cases}(-۶,۰)\in f\Rightarrow -۶a+b=۰ \\ (-۱,۲)\in f\Rightarrow -a+b=۲\end{cases}\Rightarrow a=\frac{۲}{۵}\ ,\ b=\frac{۱۲}{۵}$$

$$y=ax+b,\begin{cases}(-۱,۲)\in f\Rightarrow -a+b=۲ \\ (۴,۰)\in f\Rightarrow ۴a+b=۰\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{۲}{۵}\ ,\ b=\frac{۸}{۵}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{۲}{۵}x+\frac{۱۲}{۵} & -۶\le x\le -۱ \\ -\frac{۲}{۵}x+\frac{۸}{۵} & -۱<x\le ۴\end{cases}$$

۱- روش اول) $y=|x|$ را رسم ،انتقال یک واحد به راست ، قرینه نمودار نسبت به محور x ها ، انبساط عمودی در امتداد محور y هابا ضریب ۳ ، دو واحد انتقال به بالا.

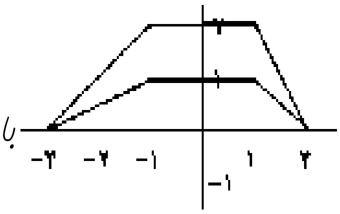


روش دوم) ابتدا نمودار $y=-3|x|$ را رسم کرده و سپس نمودار را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به بالا انتقال می دهیم.

(رسم با روش دوم↑) $y=-3|x| \Rightarrow$

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-3	0	-3	-6

۲-

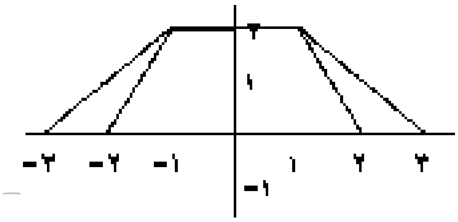


(قرمز،نمودار پیش فرض و آبی ،نمودار جواب)

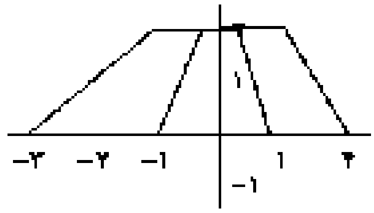
با توجه به نمودار f داریم $f(-3)=0\ ,f(-1)=2\ ,f(1)=2\ ,f(2)=0$

الف) انقباض عمودی در امتداد محور y ها با ضریب $\frac{1}{2}$

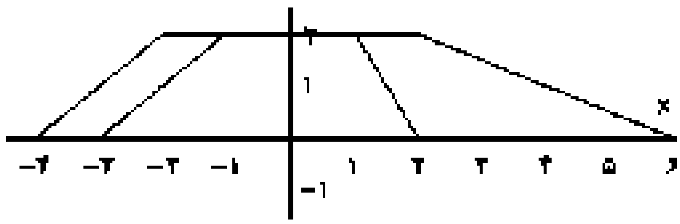
ب) قرینه نسبت به محور y ها



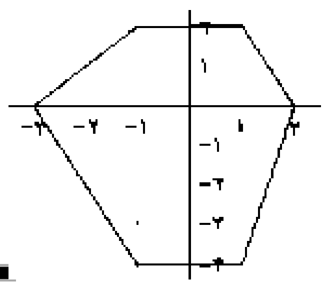
ج) انقباض افقی در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{3}$

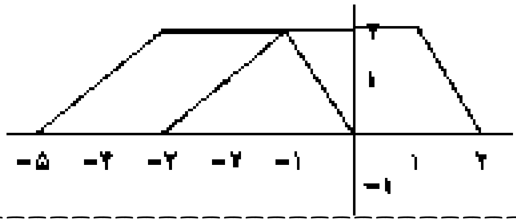


د) قرینه نسبت به محور y ها و انبساط افقی در امتداد محور x ها با ضریب ۲



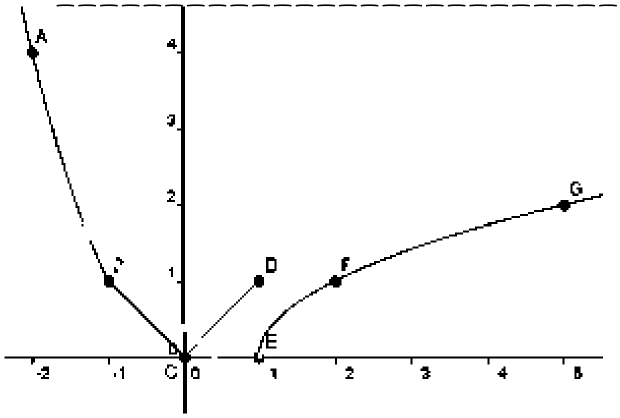
ه) قرینه نسبت به محور x ها ، انبساط عمودی درامتداد محور y ها باضریب ۲





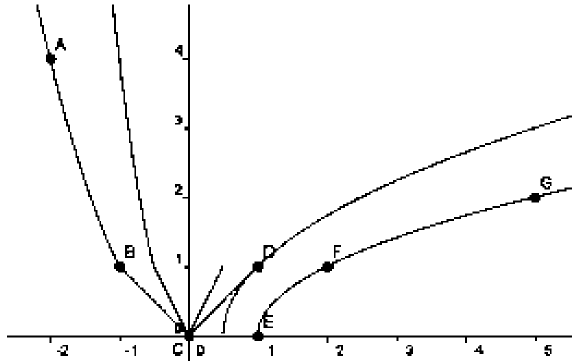
انتقال نمودار ۲ واحد به سمت چپ (و

۳- $$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x<-۱ \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -۳ & -۲ & -۱ \\ \hline y & ۹ & ۴ & ۱ \end{array} \\ |x| & -۱\le x\le ۱ \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -۱ & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۱ & ۰ & ۱ \end{array} \\ \sqrt{x-۱} & x>۱ \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۱ & ۲ & ۵ \\ \hline y & ۰ & ۱ & ۲ \end{array} \end{cases}$$



رسم $y=f(۲x)$

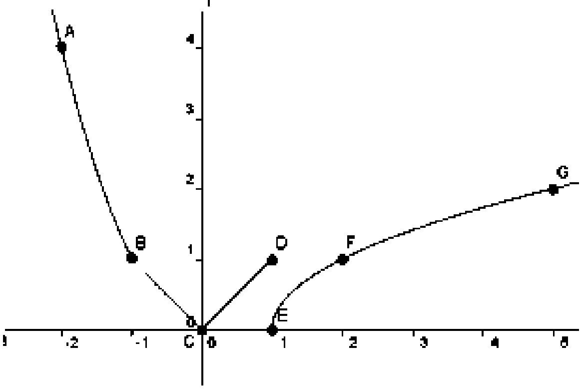
انقباض افقی در امتداد محور xها با ضریب $\frac{۱}{۲}$.



رسم $y=f(-۲x)$

قرینه نسبت به محور yها و انقباض افقی

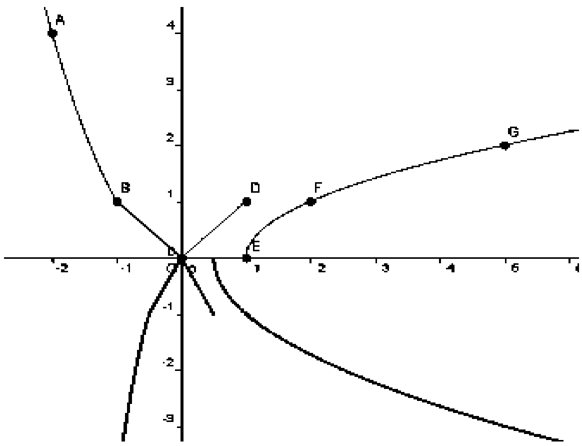
این نمودار در امتداد محور xها با ضریب $\frac{۱}{۲}$.



رسم $y=-f(۲x)$

قرینه نسبت به محور x ها و انقباض افقی

درامتداد محور x ها با ضریب $\frac{۱}{۲}$.



۴- الف) نادرست (باید ۳ واحد به چپ)

ب) نادرست ، g قرینه نمودار f نسبت به محور y هاست. ج) درست

۵- g از انتقال f به اندازه ۲ واحد به سمت چپ و قرینه نسبت به محور x ها و آنگاه انقباض عمودی در امتداد محور y ها به اندازه $\frac{۱}{۲}$ و آنگاه انتقال به اندازه ۳ واحد به پائین .

$$g(x)=-\frac{۱}{۲}|x+۲|-۳$$

۶- $$\sqrt{x}\to\sqrt{-x}\to\sqrt{-(x-۳)}\to\sqrt{-(x-۳)}-۵\Rightarrow f(x)=\sqrt{-x+۳}-۵$$

۷- الف) $g(-۸)=\frac{۱}{۲}f(-۸)=\frac{۱}{۲}\times ۶=۳\Rightarrow(-۸\,,۳)\in g$

ب) $g(۸)=f(-۸)=۶\Rightarrow(۸\,,۶)\in g$

ج) $g(-۸)=f(-۸)-۳=۶-۳=۳\Rightarrow(-۸\,,۳)\in g$

د) $g(-۸)=۳f(-۸)=۳\times ۶=۱۸\Rightarrow(-۸\,,۱۸)\in g$

۸- الف) $g(x)=-\frac{۱}{۲}f(x-۱)+۳$ انتقال ۱ واحد به راست ، قرینه نسبت به محور x ها ، انقباض عمودی با ضریب $\frac{۱}{۲}$ ، انتقال ۳ واحد به بالا .

ب) $g(x)=-۲f(x+۴)-۳$ انتقال ۴ واحد به چپ ، قرینه نسبت به محور x ها ، انبساط عمودی با ضریب ۲ ، انتقال ۳ واحد به پائین .

ج) $g(x)=-۲f(x-\frac{۱}{۳})+۱$ انتقال $\frac{۱}{۳}$ واحد به راست ، قرینه نسبت به محور x ها ، انبساط عمودی با ضریب ۲ ، انتقال ۱ واحد به بالا .

۹- نقاط

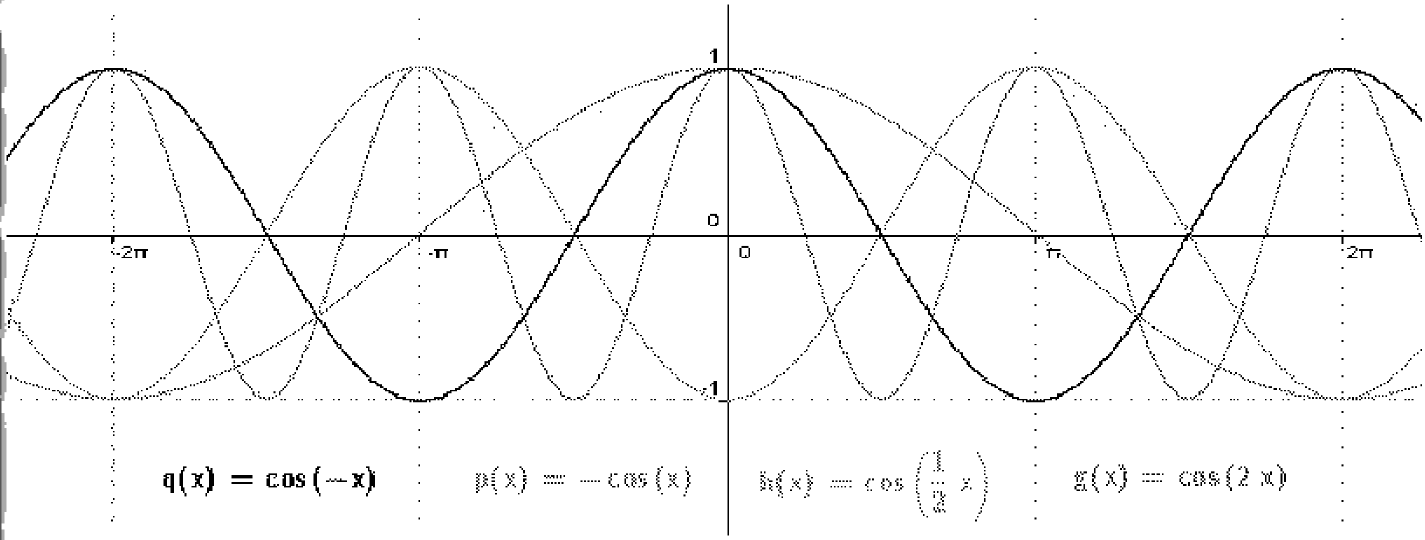
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	1	0	-1	0	1

$\Rightarrow f(x)=\cos(x)$ را مبنا گرفته و بر این نقاط دستورات زیر را اعمال و سپس با توجه به شکل کلی نمودار پیش فرض ، نمودار اصلی را رسم کنید.

$f(2x)$ نمودار f منقبض به صورت افقی با ضریب $\frac{1}{2}$.

$f(\frac{1}{2}x)$ نمودار f منبسط به صورت افقی با ضریب ۲ .

$-f(x)$ نمودار f قرینه نسبت به محور x ها . $f(-x)$ نمودار f قرینه نسبت به محور y ها .



---

۱۰ – نمودار دو تابع قرینه همدیگر نسبت به محور y ها

$D_{\sqrt{x}}=[0,+\infty)\ ,\ D_{\sqrt{-x}}=(-\infty,0]$ ، $R_{\sqrt{x}}=R_{\sqrt{-x}}=[0,+\infty)$.

نمودار دو تابع $f(x),f(-x)$ قرینه همدیگر نسبت به محور y ها ،

$g(x)=f(-x)\Rightarrow D_g=\{x\in R\mid -x\in D_f\}$ ، $R_{f(x)}=R_{f(-x)}$.

توضیح : چون نمودار قرینه نسبت به محور y هاست بنابراین تصویر نمودار بر محور y ها (یعنی برد) تغییر نمی کند ولی دامنه نسبت به محور y ها قرینه می شود.(دو دامنه قرینه همدیگرند)

۱۱- ابتدا نسبت به محور y ها قرینه شده سپس اگر $|a|>1$ در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{|a|}$ منقبض و اگر $|a|<1$ با ضریب $\frac{1}{|a|}$ منبسط می گردد.

$$(f/g)_{(x)}=f(x)/g(x)=\frac{5x}{3x-7}\div\frac{x^5-1}{5x-15}=\frac{25x(x-3)}{(3x-7)(x^5-1)}$$

۱-
$$\begin{cases}3x-7=0\Rightarrow x=\frac{7}{3}\Rightarrow D_f=R-\{\frac{7}{3}\}\\ 5x-15=0\Rightarrow x=3\Rightarrow D_g=R-\{3\}\Rightarrow D_{f/g}=R-\{\frac{7}{3},3,1\}\\ g(x)=0\Rightarrow x^5-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow\end{cases}$$

۲- الف) $D_f=R\ ,\ D_g=R\ ,\begin{cases}f(x)=0\Rightarrow 4x=0\Rightarrow x=0\\ g(x)=0\Rightarrow 2-x=0\Rightarrow x=2\end{cases}$

$$(g/f)_{(x)}=g(x)/f(x)=\frac{2-x}{4x}\ ,\ D_{g/f}=R\cap R\cap(R-\{0\})=R-\{0\}$$

$$(f/g)_{(x)}=f(x)/g(x)=\frac{4x}{x-2},D_{f/g}=R\cap R\cap(R-\{2\})=R-\{2\}$$

$$(f.f)_{(x)}=f(x).f(x)=16x^2\ ,\ D_{f.f}=R\cap R=R$$

$$(f.g)_{(x)}=f(x).g(x)=4x(2-x)\ ,\ D_{f.g}=R\cap R=R$$

$$(f-g)_{(x)}=f(x)-g(x)=4x-2+x=5x-2\ ,\ D_{f-g}=R\cap R=R$$

ب) $x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow D_f=R-\{2\}\quad,\quad 6-x=0\Rightarrow x=6\Rightarrow D_g=R-\{6\}$

$f(x)=0\ ,\ g(x)=0$ جواب ندارد

$$(g/f)_{(x)}=g(x)/f(x)=\frac{1}{6-x}\div\frac{4}{x-2}=\frac{x-2}{4(6-x)}\ ,\ D_{g/f}=R-\{2,6\}$$

$$(f/g)_{(x)}=f(x)/g(x)=\frac{4}{x-2}\div\frac{1}{6-x}=\frac{4(6-x)}{x-2},\ D_{f/g}=R-\{2,6\}$$

$$(f.f)_{(x)}=f(x).f(x)=\frac{16}{(x-2)^2}\ ,\ D_{f.f}=R-\{2\}$$

ادامه (ب)

$$(f.g)_{(x)}=f(x).g(x)=\frac{۴}{x-۲}\times\frac{۱}{۶-x}=\frac{۴}{(x-۲)(۶-x)}\quad ,D_{f.g}=R-\{۲,۶\}$$

$$(f-g)_{(x)}=f(x)-g(x)=\frac{۴}{x-۲}-\frac{۱}{۶-x}=\frac{۲۶-۵x}{(x-۲)(۶-x)}\ ,D_{f-g}=R-\{۲,۶\}$$

ج) $x-۲\geq ۰\Rightarrow x\geq ۲\Rightarrow D_f=[۲,+\infty)\quad ,\ x+۲\geq ۰\Rightarrow x\geq -۲\Rightarrow D_g=[-۲,+\infty)$

$f(x)=۰\Rightarrow x-۲=۰\Rightarrow x=۲\quad ,\ g(x)=۰\Rightarrow x+۲=۰\Rightarrow x=-۲$

$$(g/f)_{(x)}=g(x)/f(x)=\frac{\sqrt{x+۲}}{\sqrt{x-۲}}\ ,D_{g/f}=[-۲,+\infty)\cap[۲,+\infty)\cap(R-\{۲\})=(۲,+\infty)$$

$$(f/g)_{(x)}=f(x)/g(x)=\frac{\sqrt{x-۲}}{\sqrt{x+۲}},D_{f/g}=[۲,+\infty)\cap[-۲,+\infty)\cap(R-\{-۲\})=[۲,+\infty)$$

$$(f.f)_{(x)}=f(x).f(x)=(\sqrt{x-۲})^۲=x-۲\ ,D_{f.f}=[۲,+\infty)\cap[۲,+\infty)=[۲,+\infty)$$

$$(f.g)_{(x)}=f(x).g(x)=\sqrt{x-۲}.\sqrt{x+۲}\ ,\ D_{f.g}=[۲,+\infty)\cap[-۲,+\infty)=[۲,+\infty)$$

$$(f-g)_{(x)}=f(x)-g(x)=\sqrt{x-۲}-\sqrt{x+۲}\ ,D_{f-g}=[۲,+\infty)$$

د) $x+۳\geq ۰\Rightarrow x\geq -۳\Rightarrow D_f=[-۳,+\infty)\ ,\ x=۰\Rightarrow D_g=R-\{۰\}$

$f(x)=۰\Rightarrow x=-۳\quad ,\ g(x)=۰$ جواب ندارد

$$(g/f)_{(x)}=g(x)/f(x)=\frac{۲}{x}\div\sqrt{x+۳}=\frac{۲}{x\sqrt{x+۳}}\ ,\ D_{g/f}=(-۳,+\infty)-\{۰\}$$

$$(f/g)_{(x)}=f(x)/g(x)=\sqrt{x+۳}\div\frac{۲}{x}=\frac{x\sqrt{x+۳}}{۲}\ ,D_{f/g}=[-۳,+\infty)-\{۰\}$$

$$(f.f)_{(x)}=f(x).f(x)=(\sqrt{x+۳})^۲=x+۳\ ,D_{f.f}=[-۳,+\infty)$$

$$(f.g)_{(x)}=f(x).g(x)=\sqrt{x+۳}.\frac{۲}{x}=\frac{۲\sqrt{x+۳}}{x}\ ,D_{f.g}=[-۳,+\infty)-\{۰\}$$

$$(f-g)_{(x)}=f(x)-g(x)=\sqrt{x+۳}-\frac{۲}{x},\ D_{f-g}=[-۳,+\infty)-\{۰\}$$

۳-

$$f(x)=\begin{cases}۵x-۷ & x\geq ۱\\ -x-۱ & x<۱\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{۲}x-۲ & x\geq -۲\\ -۱ & x<-۲\end{cases}$$

الف) $(f+g)_{(-۴)}=f(-۴)+g(-۴)=(۴-۱)+(-۱)=۲$

ب) $(f-g)_{(۳)}=f(۳)-g(۳)=(۵(۳)-۷)-(-\frac{۱}{۲}(۳)-۲)=\frac{۲۳}{۲}$

ج) $(f/g)_{(۰)}=f(۰)/g(۰)=(-۰-۱)/(-\frac{۱}{۲}(۰)-۲)=\frac{۱}{۲}$

د) $(f+g)_{(۲)}=f(۲)+g(۲)=(۵(۲)-۷)+(-\frac{۱}{۲}(۲)-۲)=۰$

ه) $(f.g)_{(\frac{۱}{۳})}=f(\frac{۱}{۳}).g(\frac{۱}{۳})=(-\frac{۱}{۳}-۱)(-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۳})-۲)=\frac{۲۶}{۹}$

و) $(fog)_{(-\frac{۱}{۲})}=f(g(-\frac{۱}{۲}))=f(-\frac{۱}{۲}(-\frac{۱}{۲})-۲)=f(-\frac{۷}{۴})=\frac{۷}{۴}-۱=\frac{۳}{۴}$

ز) $(gof)_{(-۵)}=g(f(-۵))=g(-(-۵)-۱)=g(۴)=-\frac{۱}{۲}(۴)-۲=-۴$

ح) $(fof)_{(۷)}=f(f(۷))=f(۵(۷)-۷)=f(۲۸)=۵(۲۸)-۷=۱۳۳$

ط) $(fog)_{(۴)}=f(g(۴))=f(-\frac{۱}{۲}(۴)-۲)=f(-۴)=-(-۴)-۱=۳$

ی) $(f/g)_{(\frac{۲}{۳})}=f(\frac{۲}{۳})/g(\frac{۲}{۳})=(-\frac{۲}{۳}-۱)\div(-\frac{۱}{۲}(\frac{۲}{۳})-۲)=(-\frac{۵}{۳})\div(-\frac{۷}{۳})=\frac{۵}{۷}$

۴-

$D_f=N \ , \ D_g=\{۱,۲,۳,۴\} \ , \ D_{۲f+g}=\{۱,۲,۳,۴\} \ , \ D_{gof}=\{۱,۲,۳,۴\}$

$(۲f+g)_{(۱)}=۲f(۱)+g(۱)=۲(۲)+۲(۱)=۶ \ , \ (gof)_{(۱)}=g(f(۱))=g(۲)=۲(۲)=۴$

$(۲f+g)_{(۲)}=۲f(۲)+g(۲)=۲(۳)+۲(۲)=۱۰ \ , \ (gof)_{(۲)}=g(f(۲))=g(۳)=۲(۳)=۶$

$(۲f+g)_{(۳)}=۲f(۳)+g(۳)=۲(۵)+۲(۳)=۱۶ \ , \ (gof)_{(۳)}=g(f(۳))=g(۵)=۲(۵)=۱۰$

$(۲f+g)_{(۴)}=۲f(۴)+g(۴)=۲(۷)+۲(۴)=۲۲ \ , \ (gof)_{(۴)}=g(f(۴))=g(۷)=۲(۷)=۱۴$

۵-
$$f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}\ ,\ 1-x^2=0\Rightarrow x=\pm 1\Rightarrow D_f=R-\{\pm 1\}$$
$$g(x)=\sqrt{x(1-x)}\ ,\ x(1-x)\geq 0\Rightarrow 0\leq x\leq 1\Rightarrow D_g=[0,1]$$
$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[0,1] \mid \sqrt{x(1-x)}\neq \pm 1$$
$\sqrt{x(1-x)}=1\Rightarrow x-x^2=1\Rightarrow x^2-x+1=0\ ,\ \Delta=-3<0$ معادله جواب ندارد

$\sqrt{x(1-x)}=-1\ ,\ \sqrt{x(1-x)}\geq 0\ ,\ -1<0\Rightarrow$ معادله جواب ندارد

$$\Rightarrow D_{fog}=\{x\in[0,1] \mid x\in R\}=[0,1]$$

۶-

الف) $2r=x\Rightarrow r=\frac{x}{2}\Rightarrow r(x)=\frac{x}{2}$

ب) $A(r)=\pi r^2$

ج) $(AOr)_{(x)}=A(r(x))=\pi r^2=\pi(\frac{x}{2})^2=\frac{\pi x^2}{4}$ ، مساحت دایره ای به شعاع $\frac{x}{2}$

۷-
$$f+g=\{(-4,f(-4)+g(-4)),(0,f(0)+g(0)),(3,f(3)+g(3))$$
$$=\{(-4,13+(-7)),(0,5+(-3)),(3,-5+0)\}=\{(-4,6),(0,2),(3,-5)\}$$
$$f-g=\{(-4,13-(-7)),(0,5-(-3)),(3,-5-0)\}=\{(-4,20),(0,8),(3,-5)\}$$
$$f\times g=\{(-4,13\times(-7)),(0,5\times(-3)),(3,-5\times 0)\}=\{(-4,-91),(0,-15),(3,0)\}$$
چون $g(0)=0$ پس $0\notin D_{f/g}$ بنابراین
$$f/g=\{(-4,13\div(-7)),(0,5\div(-3))\}=\{(-4,-\frac{13}{7}),(0,-\frac{5}{3})\}$$

۸- x فاصله زمانی از ۱۳۸۶ تا سال مورد نظر — زمان اول; $f(x)=27+3x$

هرروزمان $f(x)+g(x)=39+5x$ — زمان دوم; $g(x)=12+2x$

(مجموع فروش پس از ده سال) $x=1396-1386=10\Rightarrow (f+g)_{(10)}=39+5(10)=89$ میلیون

۹-

$f(x)=x^{2}+2x+2=(x+1)^{2}+1$

$\Rightarrow (fog)_{(x)}=f(g(x))=(g(x)+1)^{2}+1\ ,\ (fog)_{(x)}=x^{2}-4x+5=(x-2)^{2}+1$

$\Rightarrow (g(x)+1)^{2}+1=(x-2)^{2}+1\Rightarrow |g(x)+1|=|x-2|\Rightarrow g(x)+1=\pm|x-2|$

$\Rightarrow g(x)=-1\pm|x-2|$

۱۰-

$f(x)=\sqrt{1-x^{2}}\ ,\ 1-x^{2}\geq 0\Rightarrow -1\leq x\leq 1\Rightarrow D_f=[-1,1]$

$g(x)=\sqrt{x}\ ,\ x\geq 0\Rightarrow D_g=[0,+\infty)$

$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[0,1]$

$D_{(f+g)of}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_{f+g}\}=\{x\in[-1,1]\mid\sqrt{1-x^{2}}\in[0,1]\}$

پس باید $0\leq\sqrt{1-x^{2}}\leq 1$ اما می دانیم $\sqrt{1-x^{2}}\geq 0$ از سوئی

$\sqrt{1-x^{2}}\leq 1\Rightarrow 1-x^{2}\leq 1\Rightarrow x^{2}\geq 0$ که همواره برقرار است ،بنابراین

$D_{(f+g)of}=\{x\in[-1,1]\mid\sqrt{1-x^{2}}\in[0,1]\}=\{x\in[-1,1]\mid x\in R\}=[-1,1]$

۱۱-

$$\frac{3}{4}<1\Rightarrow f(\frac{3}{4})=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}>1\Rightarrow f(f(\frac{3}{4}))=f(\frac{3}{2})=2(\frac{3}{2})-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

۱۲- الف) نادرست زیرا

$$(fog)_{(x)} = f(g(x)) = f(\sqrt{x^۲ - ۴}) = (\sqrt{x^۲ - ۴})^۲ - ۴ = x^۲ - ۸$$

ب) نادرست زیرا $(fog)_{(۴)} = f(g(۴)) = f(۷) = ۵$

ج) درست زیرا $(fog)_{(۵)} = f(g(۵)) = f(۹) = \sqrt{۹} = ۳\ ,\ g(۲) = ۲(۲) - ۱ = ۳$

د) نادرست ،مثال نقض $f(x) = \sqrt{x}\ ,\ g(x) = x + ۱ \Rightarrow \begin{cases} (fog)_{(x)} = \sqrt{x + ۱} \\ (gof)_{(x)} = \sqrt{x} + ۱ \end{cases}$

۱۳-

$$(fog)_{(x)} = h(x) \Rightarrow f(۲x + ۱) = ۴x^۲ + ۴x + ۷ = ۴x^۲ + ۴x + ۱ + ۶$$

$$= (۲x + ۱)^۲ + ۶ \xrightarrow{۲x+۱ \to x} f(x) = x^۲ + ۶$$

۱۴-

$f(x) = \sqrt{x^۲ + ۵}\ ,\ x^۲ + ۵ \geq ۰$ همواره برقرار است $\Rightarrow D_f = R$

$$g(x) = \sqrt{۴ - x^۲}\ ,\ ۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲ \Rightarrow D_g = [-۲,۲]$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-۲,۲] \mid \sqrt{۴ - x^۲} \in R\} = [-۲,۲]$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in R \mid \sqrt{x^۲ + ۵} \in [-۲,۲]\}$$

$$-۲ \leq \sqrt{x^۲ + ۵} \leq ۲ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^۲ + ۵} \geq -۲ \Rightarrow x \in R \\ \text{and} \\ \sqrt{x^۲ + ۵} \leq ۲ \Rightarrow x^۲ + ۵ \leq ۴ \Rightarrow x^۲ \leq -۱ \Rightarrow x \in \varnothing \end{cases}$$

اشتراک دو مجموعه بالا تهی است بنابراین $D_{gof} = \varnothing$

$$(fog)_{(x)} = f(g(x)) = f(\sqrt{۴ - x^۲}) = \sqrt{۴ - x^۲ + ۵} = \sqrt{۹ - x^۲}$$

$$(gof)_{(x)} = \{\ \}$$

۱۵- الف) $f(g(۱)) = f(۶) = ۵$ ب) $g(f(۱)) = g(۳) = ۲$

ج) $f(f(۱)) = f(۳) = ۴$ د) $g(g(۱)) = g(۶) = ۳$

ه) $(gof)_{(۳)} = g(f(۳)) = g(۴) = ۱$ و) $(fog)_{(۶)} = f(g(۶)) = f(۳) = ۴$

۱۶-

$(fog)_{(۴)} = f(g(۴)) = f(۶) = ۵ \quad , \quad (fog)_{(۲)} = f(g(۲)) = f(۴) = ۵$

$(fog)_{(۶)} = f(g(۶)) = f(۸) = ۱۲ \quad , \quad (fog)_{(۸)} = f(g(۸)) = f(۱۰) = ۲$

$\Rightarrow fog = \{(۴,۵),(۲,۵),(۶,۱۲),(۸,۲)\}$

$(gof)_{(۱۰)} = f(f(۱۰)) = g(۲) = ۴ \Rightarrow gof = \{(۱۰,۴)\}$

۱- شماره گذاری چپ به راست و از بالا به پائین

a) نه زوج و نه فرد (متقارن نسبت به مبدأ و محور y هانیست)

$$f(-x)=|-x+۱|-۱=|x-۱|-۱\neq|x+۱|-۱=f(x)$$

b) فرد (نسبت به مبدأ متقارن است)

$D_g=[-۱,۱]-\{۰\}$ دامنه متقارن

$$g(-x)=-x+\frac{|-x|}{-x}=-x+\frac{|x|}{-x}=-x-\frac{|x|}{x}=-(x+\frac{|x|}{x})=-g(x)$$

c) زوج (متقارن نسبت به محور y هاست)

$$h(x)=\begin{cases}x+\frac{۱۷}{۴} & -۴\le x\le-\frac{۱}{۴}\\ -x+\frac{۱۷}{۴} & \frac{۱}{۴}\le x\le ۴\end{cases}\quad D_h=[-۴,-\frac{۱}{۴}]\cup[\frac{۱}{۴},۴]$$

$$h(-x)=\begin{cases}-x+\frac{۱۷}{۴} & -۴\le -x\le-\frac{۱}{۴}\\ -(-x)+\frac{۱۷}{۴} & \frac{۱}{۴}\le -x\le ۴\end{cases}=\begin{cases}-x+\frac{۱۷}{۴} & \frac{۱}{۴}\le x\le ۴\\ x+\frac{۱۷}{۴} & -۴\le x\le-\frac{۱}{۴}\end{cases}=h(x)$$

d) فرد (نسبت به مبدأ متقارن است)

$D_t=R$ و متقارن $t(-x)=۲(-x)=-۲x=-t(x)$

e) زوج (نسبت به محور y ها متقارن است)

$D_k=R$ و متقارن $k(-x)=۲=k(x)$

۲- الف) $۵-x^۲\ge ۰\Rightarrow |x|\le\sqrt{۵}\Rightarrow x\in[-\sqrt{۵},\sqrt{۵}]$ دامنه متقارن

$$f(-x)=(-x)\sqrt{۵-(-x)^۲}=-x\sqrt{۵-x^۲}=-f(x)\Rightarrow$$ تابع فرد

ب) $x^۳-۱=۰\Rightarrow x^۳=۱\Rightarrow x=۱\Rightarrow D_f=R-\{۱\}$

دامنه متقارن نیست چون $-۱\in D_f$ ولی $۱\notin D_f$ پس نه زوج و نه فرد است.

ج) $x > \cdot \Rightarrow f(x) = ۱ , -x < \cdot \Rightarrow f(-x) = -۱ \Rightarrow f(x) = -f(x)$

ولی در تابع فرد اگر $\cdot \in D_f$ باید $f(\cdot) = \cdot$ ولی در این مثال $f(\cdot) = ۱$ پس نه زوج نه فرد

د) $f(x) = |x| \Rightarrow D_f = R$ دامنه متقارن و $f(-x) = |-x| = |x| = f(x) \Rightarrow$ زوج

ه) $f(x) = ۲x + \sin x \Rightarrow D_f = R$ دامنه متقارن

$f(-x) = ۲(-x) + \sin(-x) = -۲x - \sin x = -(۲x + \sin x) = -f(x) \Rightarrow$ فرد

و) $f(x) = x^۲ + ۲x^۸ \Rightarrow D_f = R$ دامنه متقارن

$f(-x) = (-x)^۲ + ۲(-x)^۸ = x^۲ + ۲x^۸ = f(x) \Rightarrow$ زوج

۳- الف) درست می دانیم $D_{f \pm g} = D_{f \times g} = D_f \bigcap Dg$ و اگر دو مجموعه متقارن باشند اشتراک (واجتماع) آنها نیز نسبت به صفر متقارن است.

$(f+g)_{(-x)} = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)_{(x)}$

ب) درست $(f \times g)_{(-x)} = f(-x) \times g(-x) = f(x) \times g(x) = (f \times g)_{(x)}$

ج) نادرست $(f \times g)_{(-x)} = f(-x) \times g(-x) = -f(x) \times (-g(x)) = (f \times g)_{(x)}$ زوج

د) نادرست $(f \times g)_{(-x)} = f(-x) \times g(-x) = -f(x) \times g(x) = -(f \times g)_{(x)}$ فرد

۴- الف) $g(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{۲} = \dfrac{f(x) + f(-x)}{۲} = g(x) \Rightarrow$ زوج

ب) $h(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{۲} = -\dfrac{(f(x) - f(-x))}{۲} = -h(x) \Rightarrow$ فرد

ج) $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{۲} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{۲} = g(x) + h(x)$

د) $f(x) = (۲x^۳) + (-۱\cdot x^۲ + ۲\sqrt{۱ + x^۲} - ۵) = (h(x)) + (g(x)) \Rightarrow$ فرد h و زوج g

---

۵- $f(-x)=-f(x)$ فرد و $f(-x)=f(x)$ زوج

$f(x)=-f(-x)=-f(x)\Rightarrow 2f(x)=0\Rightarrow f(x)=0$ هم زوج و هم فرد

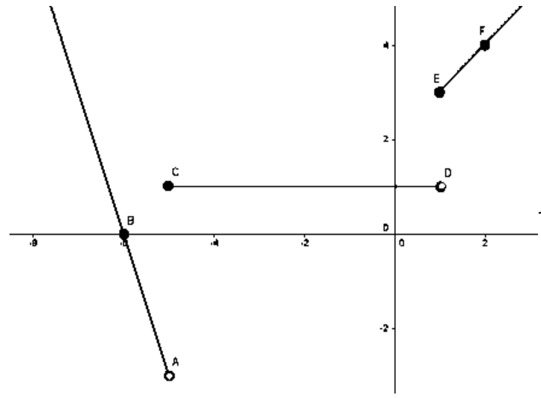
پس تابع ثابت $f(x)=0$ با دامنه دلخواه متقارن هم زوج و هم فرد است.

چون دامنه دلخواه و متقارن است پس بیشمار تابع ثابت صفر موجود است که هم زوج و هم فرد باشد.

۶- الف) زوج $\Rightarrow B(7,2)$ و فرد $\Rightarrow B(7,-2)$ ب) زوج $\Rightarrow B(-a,b)$ و فرد $\Rightarrow B(-a,-b)$

ج) زوج $\Rightarrow B(\frac{2}{7},-7)$ و فرد $\Rightarrow B(\frac{2}{7},7)$ د) زوج $\Rightarrow B(-5,3)$ و فرد $\Rightarrow B(-5,-3)$

۷-



$$f(x)=\begin{cases}-3x-18 & x<-5\Rightarrow \begin{array}{c|cc}x & -5 & -6\\ \hline y & -3 & 0\end{array}\\ 1 & -5\le x<1\Rightarrow \begin{array}{c|cc}x & -5 & 1\\ \hline y & 1 & 1\end{array}\\ x+2 & x\ge 1\Rightarrow \begin{array}{c|cc}x & 1 & 2\\ \hline y & 3 & 4\end{array}\end{cases}$$

در بازه $(-\infty,-5)$ اکیدا نزولی و در $[-5,1)$ ثابت ودر $[1,+\infty)$ اکیدا صعودی است.

دقت کنید: در بازه $[-5,+\infty)$ صعودی و بر $(-\infty,-5)$ نزولی است.

همچنین تابع بر $(-\infty,-\frac{17}{3}]\cup[-5,1)$ هم نزولی است.

۸- در بازه های $(-\infty,-4],[4,+\infty)$ اکیدانزولی ، در بازه $[0,4]$ ثابت و در $[-4,0]$ اکیدا صعودی است. رأس سهمی $(-4,-4)$ وباتوجه به محل برخورد با محور x ها $y=(x+4)^2-4$ ،

دقت کنید: دربازه $[-4,4]$ صعودی ودر $[0,+\infty)$ نزولی

در $(-\infty,-4]$ نزولی و همچنین

بر $(-\infty,-4-\sqrt{7}]\cup[0,+\infty)$ نزولی است.

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2}x+9 & x>4\\ 3 & 0<x\le 4\\ \frac{3}{2}x+3 & -2<x\le 0\\ (x+4)^2-4 & x\le -2\end{cases}$$

۹- الف) $D_f=[۲,+\infty)\quad ,if\ x_۱,x_۲\in D_f\,,x_۱<x_۲\Rightarrow x_۱-۲<x_۲-۲$

$\Rightarrow\sqrt{x_۱-۲}<\sqrt{x_۲-۲}\Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)\Rightarrow$ تابع f اکیدا صعودی(صعودی)

ب) $D_f=R-\{۰\}\quad ,if\ x_۱,x_۲\in D_f\,,x_۱<x_۲\Rightarrow\frac{۱}{x_۱}>\frac{۱}{x_۲}$

$\Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$ تابع f اکیدانزولی(نزولی)

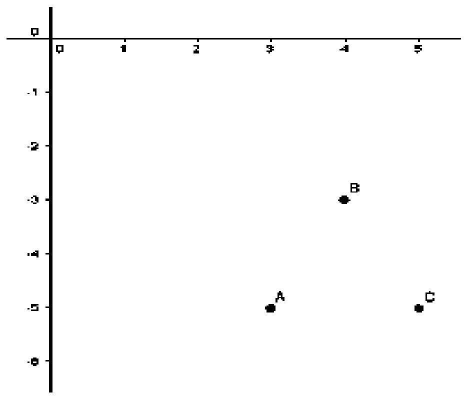
ج) $f(x)=\begin{cases}-x+۲+۵=-x+۷ & x\geq ۲\\ x-۲+۵=x+۳ & x<۲\end{cases}$

برای $x\leq ۲$ تابع اکیدا صعودی(صعودی) $if\quad x_۱<x_۲<۲\Rightarrow x_۱+۳<x_۲+۳\Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)\Rightarrow$

برای $x\geq ۲$ تابع اکیدا نزولی (نزولی) زیرا

$if\quad ۲<x_۱<x_۲\Rightarrow -x_۱>-x_۲\Rightarrow -x_۱+۷>-x_۲+۷\Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$

۱۰-



$y=-۲(x^۲-۸x+۱۶)+۳۲-۳۵=$

$-۲(x-۴)^۲-۳\Rightarrow$

x	۳	۴	۵
y	-۵	-۳	-۵

تابع f در بازه $(-\infty,۴]$ اکیدا صعودی(صعودی)

ودر بازه $[۴,+\infty)$ اکیدا نزولی(نزولی) است.

۱۱- الف) $D_f=(-\infty,۶]\quad ,\quad R_f=[-۳,+\infty)$

ب) $f(x)>۰\Rightarrow x\in(-\infty,\frac{۲۴}{۵})\quad ,\quad f(x)<۰\Rightarrow x\in(\frac{۲۴}{۵},۶)$

توضیح : معادله خط گذرنده بر نقاط $(۴,۲)$ و $(۶,-۳)$ برابر $y=-\frac{۵}{۲}x+۱۲$ بوده و محل برخورد آن با محور x ها نقطه $(\frac{۲۴}{۵},۰)$ است.

ج) f بر $(-\infty,۱]$ نزولی ،بر $[۴,۶]$ نزولی ، بر $(-\infty,۱]\cup[\frac{۲۲}{۵},۶]$ نزولی وبر $[۱,۴]$ صعودی

بر $[۵,۶]$ هم صعودی و هم نزولی است.

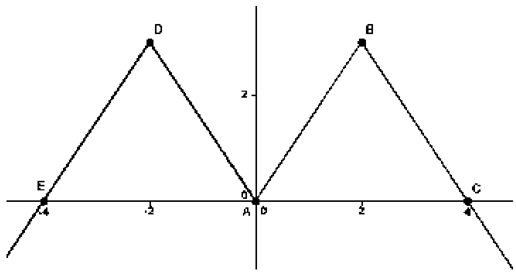
نکته : اگر در بازه ای اکیدا صعودی باشد صعودی هم هست ولی عکس آن همواره درست نیست.

ادامه سوال ۱۱ قسمت (د)

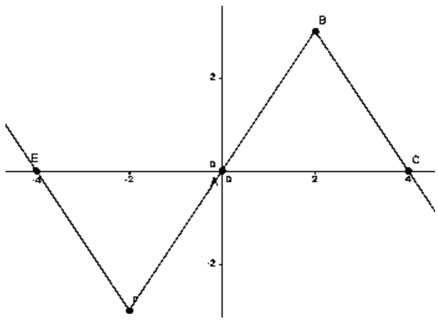
$$د)\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x+۱} & x\le ۱ \Leftarrow y=\sqrt{ax+b}\ ,(۰,۱)\ ,(۱,۰)\in f\\ \frac{۲}{۳}(x-۱) & ۱\le x\le ۴ \Leftarrow y=ax+b\ ,(۱,۰),(۴,۲)\in f\\ -۵x+۲۲ & ۴<x\le ۵ \Leftarrow y=ax+b\ ,(۴,۲),(۵,-۳)\in f\\ -۳ & ۵<x\le ۶\end{cases}$$

$$ه)\ f(-۴)=\sqrt{-(-۴)+۱}=\sqrt{۵}\ ,\ f(۵/۳)=-۳\ ,\ f(\frac{۷}{۲})=\frac{۲}{۳}(\frac{۷}{۲}-۱)=\frac{۵}{۳}$$

۱۲- الف) قرینه نمودار نسبت به محور x ها



ب) قرینه نمودار نسبت به مبدأ را اضافه کنید .



۱۳- برای برقراری تساوی $f(-x)=-f(x)$ باید $۴a^۲=۱\Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲}$ زیرا :

$$f(-x)=\log(-x+\sqrt{(-x)^۲+۴a^۲})=\log(-x+\sqrt{x^۲+۴a^۲})$$

$$=\log(\frac{(-x)^۲-(\sqrt{x^۲+۴a^۲})^۲}{-x-\sqrt{x^۲+۴a^۲}})=\log(\frac{x^۲-x^۲-۴a^۲}{-(x+\sqrt{x^۲+۴a^۲})})=\log(\frac{۴a^۲}{x+\sqrt{x^۲+۴a^۲}})$$

$$=-\log(\frac{x+\sqrt{x^۲+۴a^۲}}{۴a^۲})\ ,\ -f(x)=-\log(x+\sqrt{x^۲+۴a^۲})$$

۱۴- $f(-۲)=f(۲)=۵\ ,\ f(-۱)=f(۱)=۴\Rightarrow$ زوج f و متقارن $D_f=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

$g(-۲)=۱=-g(۲)\ ,\ g(-۱)=۲=-g(۱)\ ,g(۰)=۰=-g(۰)$ و متقارن $Dg=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

بنابراین g فرد است. (تذکر : برای f داریم $f(۰)=f(-۰)=۳$)

۱-

$$f(x)=\frac{1}{x}+2\ ,\ x=0\Rightarrow D_f=R-\{0\}$$

$$g(x)=\frac{1}{x-2}\ ,\ x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow D_g=R-\{2\}$$

$$x\in D_g\Rightarrow x\neq 2\ ,\ f(g(x))=f(\frac{1}{x-2})=\frac{1}{\frac{1}{x-2}}+2=x-2+2=x$$

$$x\in D_f\Rightarrow x\neq 0, g(f(x))=g(\frac{1}{x}+2)=\frac{1}{\frac{1}{x}+2-2}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

۲- در ربع اول چون f^{-1} قرینه نمودار f نسبت به خط $y=x$ است.

۳-

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow |x_1-2|+3=|x_2-2|+3\Rightarrow |x_1-2|=|x_2-1|$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1-2=x_2-2\Rightarrow x_1=x_2\\ \quad or\\ x_1-2=-x_2+2\Rightarrow x_1+x_2=4\end{cases}\Rightarrow$$

یعنی لزوما x_1,x_2 مساوی نیستند.

برای یک به یک شدن کافیست دامنه را محدود به $x>2$ یا $x<2$ یا $x\leq 2$ یا $x\geq 2$ کرد .

مثلا برای $x>2$ داریم $y=|x-2|+3=x-2+3=x+1$ که ۱-۱ است.

٤- f تابعی ۱-۱ است زیرا

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{x_1-5}{2x_1+3}=\frac{x_2-5}{2x_2+3}$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2+3x_1-10x_2-15=2x_1x_2-10x_1+3x_2-15\Rightarrow 13x_1=13x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

$$y=\frac{x-5}{2x+3}\Rightarrow 2xy+3y=x-5\Rightarrow x-2xy=3y+5\Rightarrow x(1-2y)=3y+5$$

$$\Rightarrow x=\frac{3y+5}{1-2y}\xrightarrow{x\to y} f^{-1}(x)=\frac{3x+5}{1-2x}\ ,D_{f^{-1}}=R-\{\frac{1}{2}\}=R_f$$

$$R_{f^{-1}}=R-\{-\frac{3}{2}\}=D_f$$

۵- الف)

$$D_f = D_g = R\ ,\ x \in R \Rightarrow (fog)_{(x)} = f(\sqrt[۳]{x+۵}) = (\sqrt[۳]{x+۵})^۳ - ۵ = x$$

$$,\ x \in R \Rightarrow (gof)_{(x)} = g(x^۳ - ۵) = \sqrt[۳]{x^۳ - ۵ + ۵} = \sqrt[۳]{x^۳} = x$$

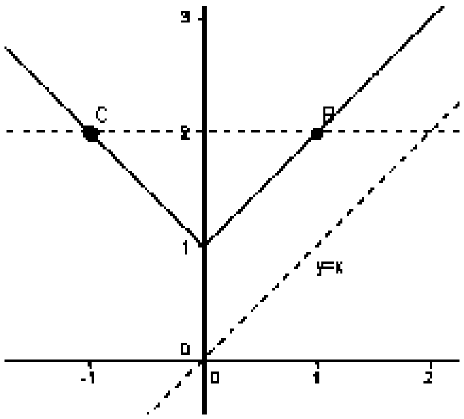
ب) $f(x) = \sqrt{x-۲}\ ,\ g(x) = x^۲ + ۲\ , D_f = [۲,+\infty)\ ,\ D_g = [۰,+\infty)$

$$x \in [۲,+\infty) \Rightarrow (gof)_{(x)} = g(\sqrt{x-۲}) = (\sqrt{x-۲})^۲ + ۲ = x - ۲ + ۲ = x$$

$$x \in [۰,+\infty) \Rightarrow (fog)_{(x)} = f(x^۲ + ۲) = \sqrt{x^۲ + ۲ - ۲} = \sqrt{x^۲} = x \quad (x \geq ۰ \text{ با فرض})$$

۶- $f(x) = |x| + ۱$ با توجه به نمودار تابع f یک به یک نیست و نمودار f بالای $y = x$ است. پس

اولا f وارون پزیر نیست و $x < f(x) \quad \forall x \in R$



۷- الف)

$$f(x_۱) = f(x_۲), x_۱, x_۲ \geq -۵ \Rightarrow (x_۱ + ۵)^۲ = (x_۲ + ۵)^۲$$

$$\xrightarrow[x_۲+۵\geq ۰]{x_۱+۵\geq ۰} x_۱ + ۵ = x_۲ + ۵ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

$$y = (x+۵)^۲ \Rightarrow \sqrt{y} = x + ۵ \Rightarrow x = \sqrt{y} - ۵$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \sqrt{x} - ۵ = f^{-۱}(x)\ ,\ x \geq ۰$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۱ \Rightarrow x_۱ - ۱ \geq ۰\ ,\ x_۲ - ۱ \geq ۰\ f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow -|x_۱ - ۱| + ۱ = -|x_۲ - ۱| + ۱$$

$$\Rightarrow |x_۱ - ۱| = |x_۲ - ۱| \Rightarrow x_۱ - ۱ = x_۲ - ۱ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

ب) $y = -|x-۱| + ۱\ ,\ x > ۱ \Rightarrow y = -x + ۱ + ۱ = -x + ۲ \Rightarrow x = -y + ۲$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = f^{-۱}(x) = -x + ۲\ ,\ x \leq ۱$$

ج) $f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow (x_۱-۳)^۲=(x_۲-۳)^۲\Rightarrow x_۱-۳=\pm(x_۲-۳)\not\Rightarrow x_۱=x_۲$

۱−۱ نیست پس وارون پذیر نیست . مثال نقض : $(۴,۱)\ ,\ (۲,۱)\in f$

د)

$$x_۱,x_۲\geq -۲\ ,\ f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow \sqrt{x_۱+۲}-۳=\sqrt{x_۲+۲}-۳$$

$$\Rightarrow x_۱+۲=x_۲+۲\Rightarrow x_۱=x_۲$$

$$y=\sqrt{x+۲}-۳\Rightarrow \sqrt{x+۲}=y+۳\Rightarrow x+۲=(y+۳)^۲\Rightarrow$$

$$x=(y+۳)^۲-۲\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=f^{-۱}(x)=(x+۳)^۲-۲\ ,\ x\geq -۳$$

−۸

روش ۱)

$$y=\frac{۳x-۲}{۵x-۳}\Rightarrow ۵xy-۳y=۳x-۲\Rightarrow ۵xy-۳x=۳y-۲$$

$$\Rightarrow x(۵y-۳)=۳y-۲\Rightarrow x=\frac{۳y-۲}{۵y-۳}\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=f^{-۱}(x)=\frac{۳x-۲}{۵x-۳}$$

روش ۲)

$$x\in R-\{\frac{۳}{۵}\},(fof)_{(x)}=f(\frac{۳x-۲}{۵x-۳})=\frac{۳(\frac{۳x-۲}{۵x-۳})-۲}{۵(\frac{۳x-۲}{۵x-۳})-۳}=$$

$$\frac{۹x-۶-۱۰x+۶}{۱۵x-۱۰-۱۵x+۹}=\frac{-x}{-۱}=x\Rightarrow f^{-۱}(x)=f(x)$$

−۹

$$f^{-۱}(x)=f(x)\Rightarrow (fof)_{(x)}=f(ax+b)=a(ax+b)+b$$

$$=a^۲x+ab+b=x\Rightarrow \begin{cases} a^۲=۱ \\ ab+b=۰ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} if\ \ a=+۱\Rightarrow b+b=۰\Rightarrow b=۰\Rightarrow y=x \\ if\ \ a=-۱\Rightarrow -b+b=۰\Rightarrow y=-x+b \end{cases}$$

−۱۰ $f(-\frac{۱}{۲})=f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}$ ولی $-\frac{۱}{۲}\neq\frac{۱}{۲}$ بنابراین f یک به یک نبوده و درنتیجه وارون پذیر نیست.

$$(fog)_{(x)}=f(۳x-۷)=۳x-۷+۳=۳x-۴\Rightarrow y=۳x-۴\Rightarrow x=\frac{y+۴}{۳}$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y}(fog)^{-۱}(x)=\frac{x+۴}{۳}$$

-۱۱

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=۳x-۷\Rightarrow y=۳x-۷\Rightarrow x=\frac{y+۷}{۳}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}g^{-۱}(x)=\frac{x+۷}{۳} \\ f(x)=x+۳\Rightarrow x=y-۳\xrightarrow{x\leftrightarrow y}f^{-۱}(x)=x-۳ \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$(g^{-۱}of^{-۱})_{(x)}=g^{-۱}(x-۳)=\frac{x-۳+۷}{۳}=\frac{x+۴}{۳}$$

-۱۲

الف)

$$۰\le ۱۰۰-\frac{۴۹}{۱۰}t^۲\le ۱۰۰\Rightarrow \frac{۴۹}{۱۰}t^۲\le ۱۰۰\Rightarrow t^۲\le\frac{۱۰۰۰}{۴۹}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱۰\sqrt{۱۰}}{۷}\le t\le\frac{۱۰\sqrt{۱۰}}{۷}\Rightarrow ۰\le t\le\frac{۱۰\sqrt{۱۰}}{۷}\Rightarrow D_h=[۰\,,\,\frac{۱۰}{۷}\sqrt{۱۰}]\quad ,\ R_h=[۰\,,\,۱۰۰]$$

ب) در دو زمان متفاوت در یک ارتفاع قرار نمی گیرد.

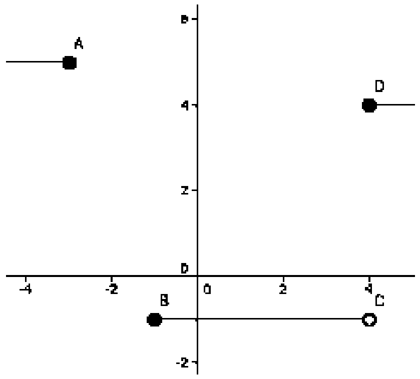
ج)

$$y=۱۰۰-\frac{۴۹}{۱۰}t^۲\Rightarrow\frac{۴۹}{۱۰}t^۲=۱۰۰-y\Rightarrow t^۲=\frac{۱۰}{۴۹}(۱۰۰-y)$$

$$\Rightarrow t=\sqrt{\frac{۱۰}{۴۹}(۱۰۰-y)}\xrightarrow{t\leftrightarrow y}y=h^{-۱}(t)=\sqrt{\frac{۱۰}{۴۹}(۱۰۰-t)}\quad ,\ t\in[۰,۱۰۰]$$

د) زمانی که سنگ دریک ارتفاع خاص قرار دارد را مشخص می کند(به ازای زمان ارتفاع سنگ را می دهد)

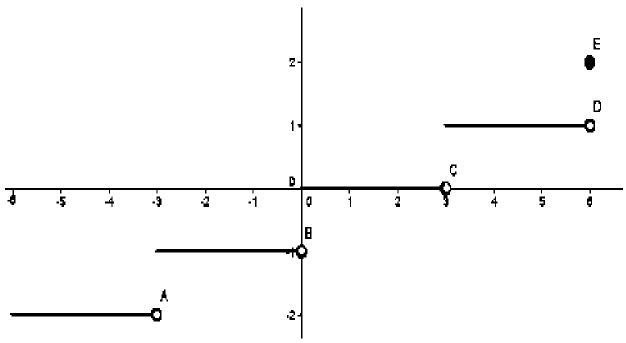
۱-



۲-

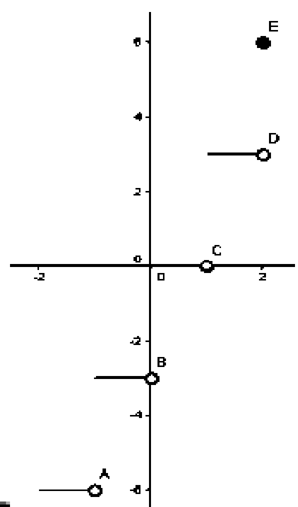
$$x \in [-۶,۶] \Rightarrow \frac{۱}{۳}x \in [-۲,۲]$$

$$\begin{cases} -۲ \le \frac{۱}{۳}x < -۱ \Rightarrow -۶ \le x < -۳ \Rightarrow y = -۲ \\ -۱ \le \frac{۱}{۳}x < ۰ \Rightarrow -۳ \le x < ۰ \Rightarrow y = -۱ \\ ۰ \le \frac{۱}{۳}x < ۱ \Rightarrow ۰ \le x < ۳ \Rightarrow y = ۰ \\ ۱ \le \frac{۱}{۳}x < ۲ \Rightarrow ۳ \le x < ۶ \Rightarrow y = -۲ \\ \frac{۱}{۳}x = ۲ \Rightarrow x = ۶ \Rightarrow y = ۲ \end{cases}$$

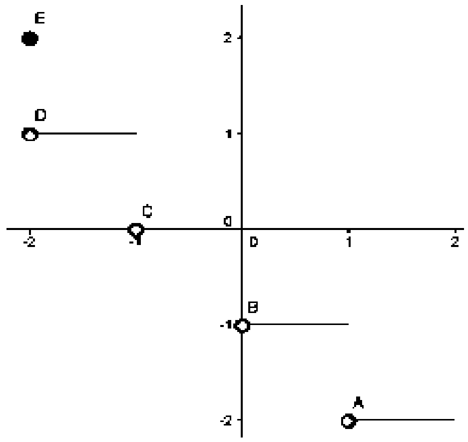


۳- f یک به یک نیست پس وارون پزیر نیست $f(\frac{۱}{۵}) = [\frac{۱}{۵}] = ۰ \,,\, f(\frac{۲}{۵}) = [\frac{۲}{۵}] = ۰ \,,\, \frac{۱}{۵} \neq \frac{۲}{۵} \Rightarrow$

۴- الف) $y = ۳[x] \Rightarrow \begin{cases} -۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = -۶ \\ -۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = -۳ \\ ۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = ۰ \\ ۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = ۳ \\ x = ۲ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow y = ۶ \end{cases}$



ب) $y=[-x]\Rightarrow\begin{cases}-۲\le -x<-۱\Rightarrow ۱<x\le ۲\Rightarrow [-x]=-۲\Rightarrow y=-۲\\ -۱\le -x<۰\Rightarrow ۰<x\le ۱\Rightarrow [-x]=-۱\Rightarrow y=-۱\\ ۰\le -x<۱\Rightarrow -۱<x\le ۰\Rightarrow [-x]=۰\Rightarrow y=۰\\ ۱\le -x<۲\Rightarrow -۲<x\le -۱\Rightarrow [-x]=۱\Rightarrow y=۱\\ -x=۲\Rightarrow x=-۲\Rightarrow [-x]=۲\Rightarrow y=۱\end{cases}$



۵- کمترین مقدار مثبت برای T با توجه به برقرای

$T\in Z\ ,f(x+T)=x+T-[x+T]=$
$x+T-[x]-T=x-[x]=f(x)\Rightarrow$

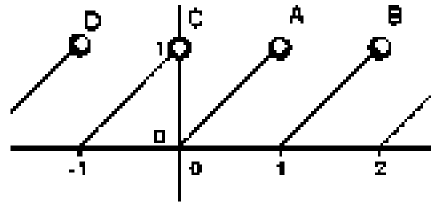
تساوی برای اعداد صحیح برابر $T=۱$ است.

نمودار تابع را درفاصله ای به طول دوره تناوب رسم می کنیم.

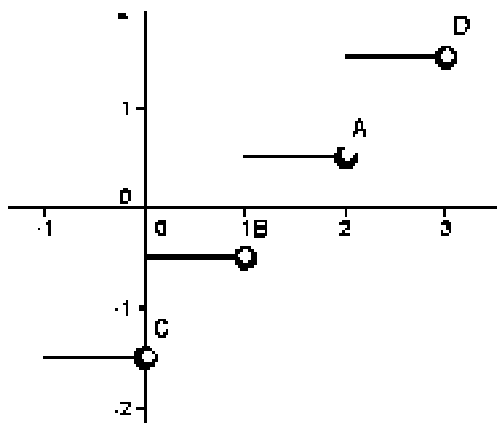
$T=۱\Rightarrow ۰\le x<۱\Rightarrow [x]=۰\Rightarrow y=x-[x]=x-۰$

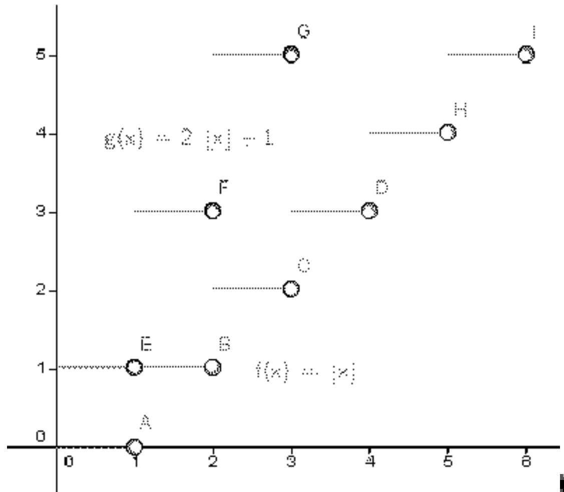
$\Rightarrow y=x\Rightarrow$

x	۰	۱
y	۰	۱



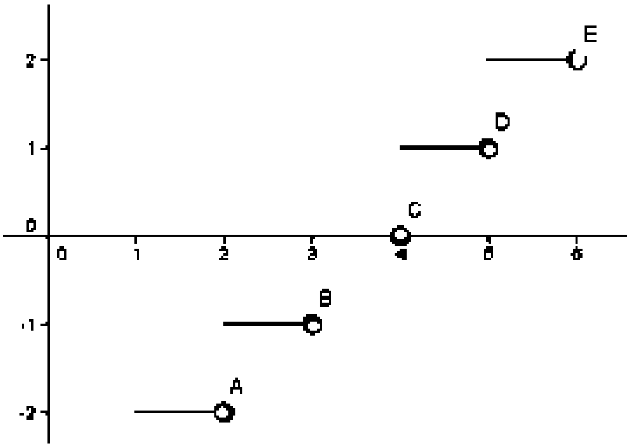
۶- الف) انتقال به اندازه $\frac{۱}{۲}$ به پائین ب)انبساط باضریب ۲درامتداد محور yهاو انتقال یک واحد به بالا





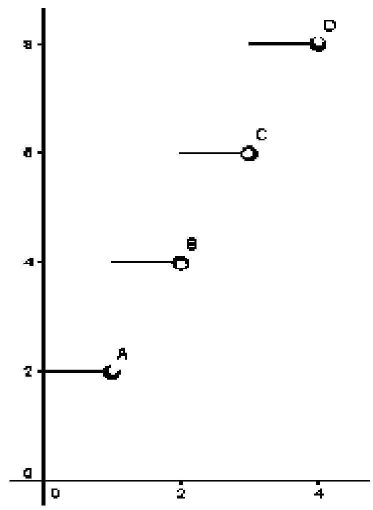
۷- این دو تابع برابرند.

$$y=[x-3]\Rightarrow\begin{cases}-2\le x-3<-1\Rightarrow[x-3]=-2\Rightarrow y=-2\ (1\le x<2)\\ -1\le x-3<0\Rightarrow[x-3]=-1\Rightarrow y=-1(2\le x<3)\\ 0\le x-3<1\Rightarrow[x-3]=0\Rightarrow y=0\ (3\le x<4)\\ 1\le x-3<2\Rightarrow[x-3]=1\Rightarrow y=1(4\le x<5)\\ 2\le x-3<3\Rightarrow[x-3]=1\Rightarrow y=2\ (5\le x<6)\end{cases}$$



$$y=[x]-3\Rightarrow\begin{cases}1\le x<2\Rightarrow[x]=1\Rightarrow y=-2\\ 2\le x<3\Rightarrow[x]=2\Rightarrow y=-1\\ 3\le x<4\Rightarrow[x]=3\Rightarrow y=0\\ 4\le x<5\Rightarrow[x]=4\Rightarrow y=1\\ 5\le x<6\Rightarrow[x]=5\Rightarrow y=2\end{cases}$$

۸-



$$f(x)=\begin{cases}2 & 0<x<1\\ 4 & 1\le x<2\\ 6 & 2\le x<3\end{cases}\Rightarrow f(x)=2[x]+2$$

۱-

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}\ ,\ (\frac{3}{5})^2+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{4}{5}\ (\alpha\ \text{در ربع اول})\ \Rightarrow\cos\alpha=\frac{4}{5}\ ,\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{5}\div\frac{4}{5}=\frac{3}{4}$$

$$\cos\beta=-\frac{5}{13}\ ,\ \sin^2\beta+(-\frac{5}{13})^2=1\Rightarrow\sin^2\beta=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$$

$$\Rightarrow\sin\beta=\pm\frac{12}{13}\ (\beta\ \text{در ربع سوم})\ \Rightarrow\sin\beta=-\frac{12}{13}\ ,\ \tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\frac{12}{13}\div\frac{-5}{13}=\frac{12}{5}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta=(\frac{4}{5}\times\frac{-5}{13})+(\frac{3}{5}\times\frac{-12}{13})=-\frac{56}{65}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta=(\frac{3}{5}\times\frac{-5}{13})+(\frac{4}{5}\times\frac{-12}{13})=-\frac{63}{65}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{12}{5}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{12}{5}}=\frac{\frac{63}{20}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{63}{16}$$

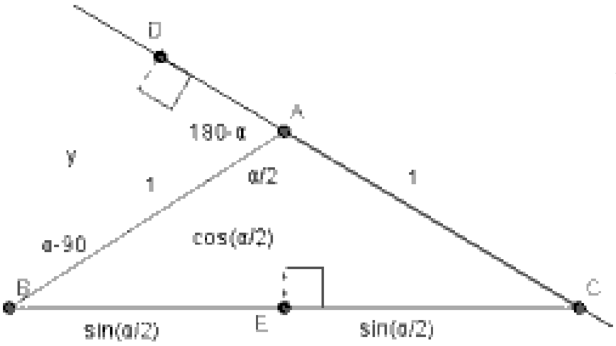
۲-

$$\cos(\alpha-90)=\frac{y}{1}=\cos(90-\alpha)=\sin\alpha$$

$$S_1=\frac{1\times y}{2}=\frac{\sin\alpha}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{2}(2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos(\frac{\alpha}{2}))=\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$S_1=S_2\Rightarrow\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}$$



برای S_1 قاعده را AC و برای S_2 قاعده را BC فرض نموده ایم.

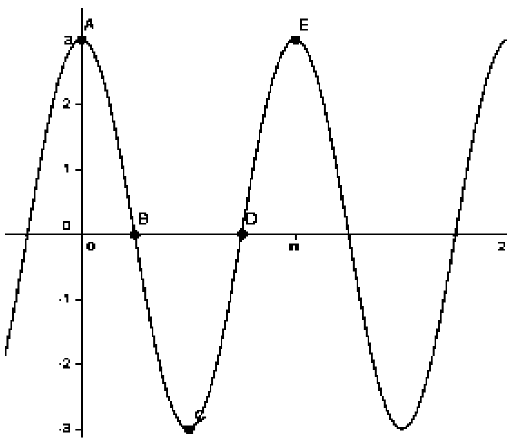
۳-

$$y=3-6\sin^2x=3-6(\frac{1-\cos 2x}{2})$$

$$=3-3+3\cos 2x=3\cos 2x$$

$$T=\frac{2\pi}{2}=\pi\Rightarrow$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	3	0	-3	0	3



۴-

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha.\cos\alpha+\cos\alpha.\sin\alpha \Rightarrow \sin ۲\alpha=۲\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha.\cos\alpha-\sin\alpha.\sin\alpha \Rightarrow \cos ۲\alpha=\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha$$

۵-

$$\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha.\tan\alpha} \Rightarrow \tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}$$

۶-

$$\sin\alpha=-\frac{۱۲}{۱۳}\,,\ \sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱ \Rightarrow \cos\alpha=-\frac{۵}{۱۳}\ (\alpha \text{ در ربع سوم})$$

چون $\frac{۳\pi}{۴}\le\frac{\alpha}{۲}\le\frac{\pi}{۲}$ پس $\frac{\alpha}{۲}$ در ربع دوم است.

$$\sin^{۲}(\frac{\alpha}{۲})=\frac{۱-\cos\alpha}{۲}=\frac{۱+\frac{۵}{۱۳}}{۲}=\frac{۹}{۱۳} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{۹}{۱۳}}\ (\frac{\alpha}{۲} \text{ در ربع دوم})$$

$$\cos^{۲}(\frac{\alpha}{۲})=\frac{۱+\cos\alpha}{۲}=\frac{۱-\frac{۵}{۱۳}}{۲}=\frac{۴}{۱۳} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{۲}=-\sqrt{\frac{۴}{۱۳}}\ (\frac{\alpha}{۲} \text{ در ربع دوم}) \Rightarrow \tan(\frac{\alpha}{۲})=-\frac{۳}{۲}$$

۷-

الف)

$$\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}(\sin x.\cos\frac{\pi}{۴}+\cos x.\sin\frac{\pi}{۴})=$$

$$\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x)=\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\sin x+\cos x)=\sin x+\cos x$$

ب) $(\sin x\ \cos x)^{۲}=\sin^{۲}+۲\sin x.\cos x+\cos^{۲}x=۱+۲\sin x.\cos x=۱+\sin ۲x$

ج)

$$\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}=\frac{۲(\frac{\sin x}{\cos x})}{۱+\frac{\sin^{۲}x}{\cos^{۲}x}}=\frac{\frac{۲\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^{۲}x+\sin^{۲}x}{\cos^{۲}x}}=\frac{۲\sin x.\cos^{۲}x}{\cos x\times(۱)}=۲\sin x.\cos x=\sin ۲x$$

د)

$$\frac{۱-\tan^{۲}x}{۱+\tan^{۲}x}=\frac{۱-\frac{\sin^{۲}x}{\cos^{۲}x}}{۱+\frac{\sin^{۲}x}{\cos^{۲}x}}=\frac{\cos^{۲}x-\sin^{۲}x}{\cos^{۲}x+\sin^{۲}x}=\frac{\cos^{۲}x-\sin^{۲}x}{۱}=\cos ۲x$$

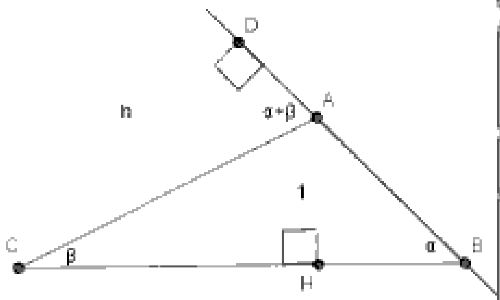
ادامه سوال ۷

ه)
$$\cos 4x = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1$$
$$= 2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

۸- پاره خطی دلخواه رسم و از نقطه دلخواه برآن عمودی به طول ۱ رسمو انتهای عمود را A می نامیم.
از A به زاویه $90-\alpha, 90-\beta$ نسبت به پاره خط AH رسم تا پاره خط اولیه رادر B,C قطع کند.
برای محاسبه S_1 قاعده را BC و برای محاسبه S_2 قاعده را AC فرض نموده ایم.
با توجه به تعریف نسبتهای مثلثاتی

$$CH = \frac{1}{\tan\beta} \quad , \quad BH = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$AC = \frac{1}{\sin\beta} \quad , \quad AB = \frac{1}{\sin\alpha} \Rightarrow h = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$$



$$\left.\begin{array}{l} S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\alpha}\right)(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta}{\sin\beta.\sin\alpha}\right) \\ S_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}\right) \end{array}\right\}$$

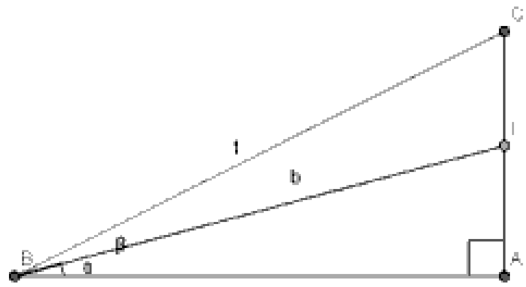
$, S_1 = S_2 \Rightarrow$ حکم

۹- با توجه به تعریف نسبتها و قانون سینوسها داریم ،

$$AB = \cos\beta = b\cos\alpha$$

$$AC = \sin\beta \quad , \quad AD = b\sin\alpha$$

$$\frac{\sin(90+\alpha)}{1} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{x} \Rightarrow x = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}$$



$$S_{BCD} = S_{ABC} - S_{BDA}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}\right)(b\cos\alpha) = \frac{1}{2}(\sin\beta)(b\cos\alpha) - \frac{1}{2}(b\sin\alpha)(\cos\beta)$$

$$\Rightarrow \sin(\beta-\alpha) = \sin\beta.\cos\alpha - \sin\alpha.\cos\beta$$

۱- الف)

$$\sin x-\cos x=1\Rightarrow\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin(\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ or\\ x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\pi\end{cases}$$

جوابهای در بازه $[-\pi,\pi]$ عبارتند از $\{-\pi,-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2},\pi\}$

ب)

$$2\sin\theta.\cos\theta+\sqrt{2}\cos\theta=0\Rightarrow\cos\theta(2\sin\theta+\sqrt{2})=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=0=\cos(\frac{\pi}{2})\Rightarrow\theta=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\\ or\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin(-\frac{\pi}{4})\Rightarrow\begin{cases}\theta=2k\pi-\frac{\pi}{4}\\ or\\ \theta=2k\pi+\frac{5\pi}{4}\end{cases}\end{cases}$$

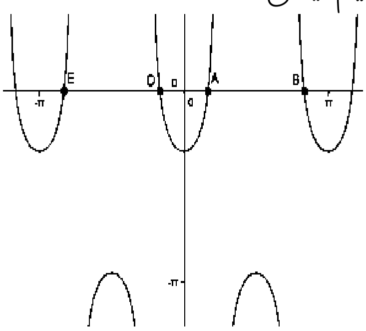
جوابهای در بازه $[-\pi,\pi]$ عبارتند از $\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\}$

ج)

$$\tan x.\tan 2x=1\Rightarrow\frac{\sin x.\sin 2x}{\cos x.\cos 2x}=1\Rightarrow\cos x.\cos 2x-\sin x.\sin 2x=0$$

$$\Rightarrow\cos(2x+x)=0\Rightarrow\cos 3x=0=\cos\frac{\pi}{2}\Rightarrow 3x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}$$

البته باید توجه داشت که جوابهای مخرج را از جوابهای به دست آمده حذف کنیم یعنی



مجموعه جواب $=\{\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}\mid k\in Z\}-\{2k\pi\pm\frac{\pi}{2},k\pi\pm\frac{\pi}{4}\mid k\in Z\}$

جوابهای در بازه $[-\pi,\pi]$ عبارتند از $\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},-\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\}$ که اعداد

$\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ چون مخرج راصفرمی کردند از جوابها حذف شدند.

د) $\Delta = ۲^۲ - ۴(۲(-۱)) = ۱۲ > ۰ \Rightarrow \sin t = \frac{-۲ \pm \sqrt{۱۲}}{۴} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۳}}{۲}$

اکنون می توان دو راه رفت ، اول) با ماشین حساب t را بیابیم که

$$\begin{cases} \sin t = \frac{-۱-\sqrt{۳}}{۲} < -۱ \Rightarrow t \in \varnothing \\ \quad or \\ \sin t = \frac{-۱+\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow t \approx ۳۷^\circ \Rightarrow t \approx ۲k\pi + \frac{۳۷\pi}{۱۸۰} \quad or \ t \approx ۲k\pi + \pi - \frac{۳۷\pi}{۱۸۰} \end{cases}$$

روش دوم)

$$\theta_۰ = \sin^{-۱}(\frac{-۱+\sqrt{۳}}{۲}) \Rightarrow t = ۲k\pi + \sin^{-۱}(\frac{-۱+\sqrt{۳}}{۲}) \ \ or \ \ t = ۲k\pi + \pi - \sin^{-۱}(\frac{-۱+\sqrt{۳}}{۲})$$

ه)

$$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ - \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - \cos x = ۰$$

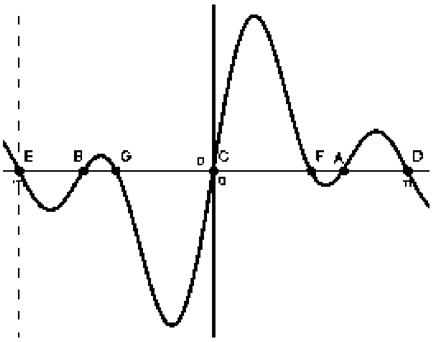
$$\Rightarrow \cos x(۲\cos x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \\ \quad or \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

جوابهای در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارتند از $\{-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}, -\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳}\}$

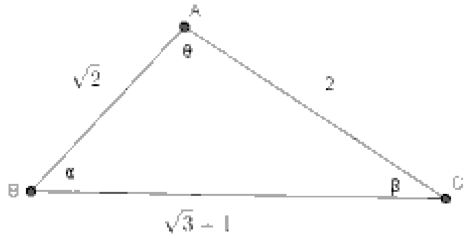
و)

$$\sin x + \sin ۳x + \sin ۲x = ۰ \Rightarrow ۲\sin ۲x . \cos x + \sin ۲x = ۰ \Rightarrow$$

$$\sin ۲x(۲\cos x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \\ \quad or \\ \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$



جوابهای در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارتند از $\{۰, -\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}, -\pi, \pi, -\frac{۲\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳}\}$



$$(۲)^۲=(\sqrt{۲})^۲+(۱+\sqrt{۳})^۲-۲(\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۳})\cos\alpha$$
$$\Rightarrow ۴=۲+۴+۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۳})\cos\alpha$$
$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{۲(۱+\sqrt{۳})}{۲\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۳})}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\alpha=۴۵^\circ$$

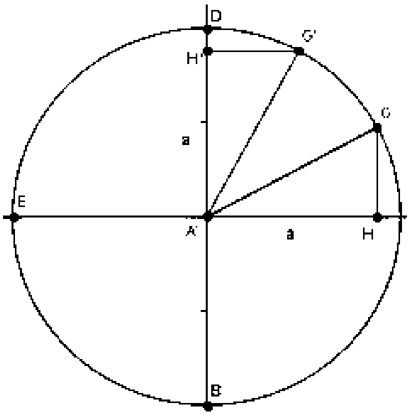
-۲

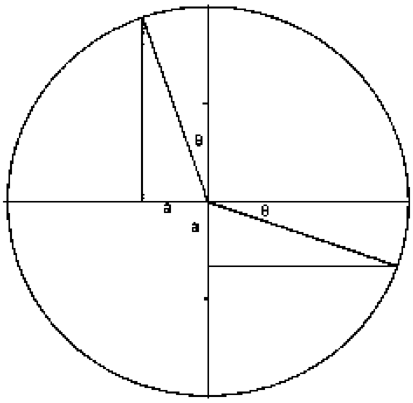
$$(\sqrt{۲})^۲=۲^۲+(۱+\sqrt{۳})^۲-۲(۲)(۱+\sqrt{۳})\cos\beta$$
$$\Rightarrow ۲=۴+۴+۲\sqrt{۳}-۴(۱+\sqrt{۳})\cos\beta$$
$$\Rightarrow \cos\beta=\frac{-۲(۳+\sqrt{۳})}{-۴(۱+\sqrt{۳})}=\frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳}+۱)}{۲(۱+\sqrt{۳})}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\Rightarrow\beta=۳۰^\circ\Rightarrow\theta=۱۸۰-(۳۰+۴۵)=۱۰۵^\circ$$

۱-

$$۰<a<۱ \Rightarrow \cos^{-۱} a=\theta\ ,\ \sin^{-۱} a=\frac{\pi}{۲}-\theta \Rightarrow \cos^{-۱} a+\sin^{-۱} a=\theta+\frac{\pi}{۲}-\theta=\frac{\pi}{۲}$$

$$-۱<a<۰ \Rightarrow \sin^{-۱} a=-\theta\ ,\ \cos^{-۱} a=\frac{\pi}{۲}+\theta \Rightarrow \sin^{-۱} a+\cos^{-۱} a=-\theta+\frac{\pi}{۲}+\theta=\frac{\pi}{۲}$$



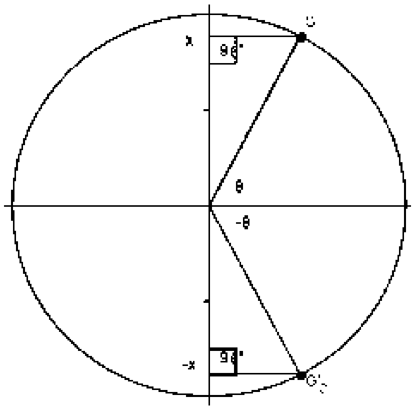


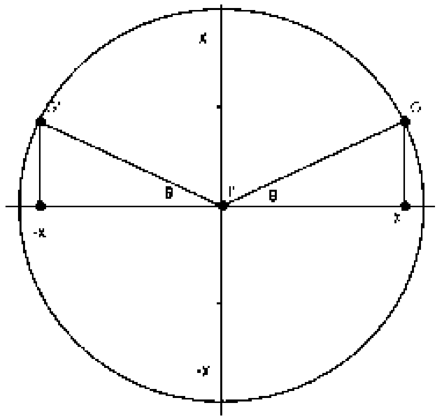
۲- دومثلث به حالت وتر ویک ضلع همنهشتند پس اگر

$$\sin^{-۱}(x)=\theta \Rightarrow \sin^{-۱}(-x)=-\theta \Rightarrow \sin^{-۱}(-x)=-\sin^{-۱}(x)$$

دومثلث به حالت وتر ویک زاویه همنهشتند پس اگر

$$\cos^{-۱}(x)=\theta \Rightarrow \cos^{-۱}(-x)=\pi-\theta \Rightarrow \cos^{-۱}(-x)=\pi-\cos^{-۱}(x)$$





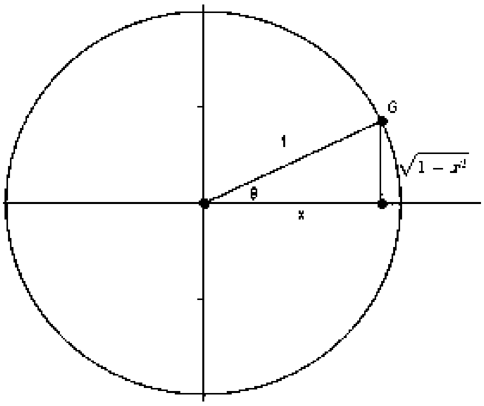
۳-

$$\cos\theta=x \Rightarrow \sin\theta=\sqrt{۱-x^{۲}}$$

$$\Rightarrow \sin(\cos^{-۱} x)=\sqrt{۱-x^{۲}}$$

$$\sin\theta=x \Rightarrow \cos\theta=\sqrt{۱-x^{۲}}$$

$$\Rightarrow \cos(\sin^{-۱} x)=\sqrt{۱-x^{۲}}$$



۴- $\tan^{-1} x = \theta \Rightarrow \tan\theta = x \ , \sin\theta = \dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \Rightarrow \sin(\tan^{-1} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\cos(\tan^{-1} x) = \sqrt{1-\sin^2(\tan^{-1} x)} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۵- می دانیم برای تابع $y = \sin^{-1} x$ دامنه برابر $[-1,1]$ است (دامنه متقارن) وطبق مسأله ۲ داریم

$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$ بنابراین تابع معکوس سینوس ، فرد است.

همچنین $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$ پس $y = \cos^{-1}(x)$ نه زوج و نه فرد است.

ونیز برای $y = \tan^{-1}(x)$ دامنه برابر $(-\infty, +\infty)$ است (دامنه متقارن) و

$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$ بنابراین تابع معکوس تانژانت ، فرد است.

۶-
$$x > 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < \tan^{-1}\dfrac{1}{x} < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < \tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{1}{x} < \pi$$

$$\cos(\tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{1}{x}) = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos(\tan^{-1} x).\cos(\tan^{-1}\frac{1}{x}) - \sin(\tan^{-1} x).\sin(\tan^{-1}\frac{1}{x}) = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}}\right) - \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}}\right)$$

$$= \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = 0 = \cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

۱-

الف)

x	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
y	−۱/۱	−۱/۰۱	−۱/۰۰۱	?	−۰/۹۹۹	−۰/۹۹	−۰/۹

$$\lim_{x \to ۰^+} y = \lim_{x \to ۰^-} y = -۱ \Rightarrow \lim_{x \to ۰} y = -۱$$

ب)

x	−۱/۱	−۱/۰۱	−۱/۰۰۱	−۱	−۰/۹۹۹	−۰/۹۹	−۰/۹
y	۲/۲۱	۲/۰۲	۲/۰۰۲	?	۲/۰۰۲۹	۲/۰۲۹	۲/۲۷۱

$$\lim_{x \to -۱^+} y = \lim_{x \to -۱^-} y = ۲ \Rightarrow \lim_{x \to -۱} y = ۲$$

ج)

x	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۲	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱
y	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	?	۴/۰۰۲	۴/۰۲	۴/۱

$\lim_{x \to ۲^+} y = ۴ \quad , \quad \lim_{x \to ۲^-} y = ۲ \Rightarrow$ حد چپ وراست نابرابر پس تابع در $x = ۲$ دارای حد نیست

د)

x	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
y	۰/۹۹۴	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹۹	?	۰/۹۹۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۴

$$\lim_{x \to ۰^+} y = \lim_{x \to ۰^-} y = ۱ \Rightarrow \lim_{x \to ۰} y = ۱$$

ه)

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
y	−۱/۵۷	−۴/۹۹	−۱۵/۸۱	?	۱۵/۸۱	۴/۹۹	۱/۵۷

$\lim_{x \to ۱^+} y = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to ۱^-} y = -\infty \Rightarrow$ تابع در $x = ۱$ حد ندارد

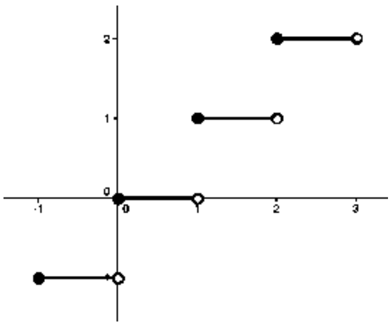
و)

x	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
y	۰/۴۹۹	۰/۴۹۹۹۹	۰/۴۹۹۹۹۹۹	?	۰/۴۹۹۹۹۹۹	۰/۴۹۹۹۹	۰/۴۹۹

$$\lim_{x \to ۰^+} y = \lim_{x \to ۰^-} y = ۰/۵ \Rightarrow \lim_{x \to ۰} y = ۰/۵$$

۲- الف)

$$y=[x]\ ,\ a=۱/۲ \Rightarrow y=\begin{cases} \dots\dots & \dots\dots \\ ۰ & ۰\le x<۱ \\ ۱ & ۱\le x<۲ \\ \dots\dots & \dots\dots \end{cases}$$

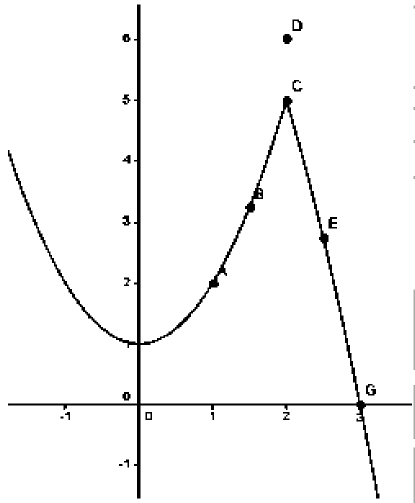


$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{۱}{۲}^{+}} y = \lim_{x\to \frac{۱}{۲}^{-}} y = ۰ \ ,\ \lim_{x\to ۱/۲^{+}} y = \lim_{x\to ۱/۲^{-}} y = ۱$$

ب)

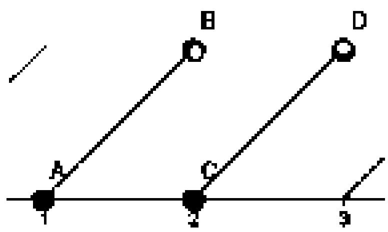
$$a=۲\ ,\ y=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x<۲ \ ,\ \begin{array}{c|ccc} x & ۱ & ۱/۵ & ۲ \\ \hline y & ۲ & ۳/۲۵ & ۵ \end{array} \\ ۶ & x=۲ \\ -x^{۲}+۹ & x>۲ \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۲ & ۲/۵ & ۳ \\ \hline y & ۵ & ۲/۷۵ & ۰ \end{array} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^{+}} y = ۵ \ ,\ \lim_{x\to ۲^{-}} y = ۵ \Rightarrow \lim_{x\to ۲} y = ۵$$



ج)

$$a=۲\ ,\ y=x-[x]=\begin{cases} \dots\dots & \dots\dots \\ x-۱ & ۱\le x<۲ \ ,\ \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array} \\ x-۲ & ۲\le x<۳ \ ,\ \begin{array}{c|cc} x & ۲ & ۳ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array} \\ \dots\dots & \dots\dots \end{cases}$$

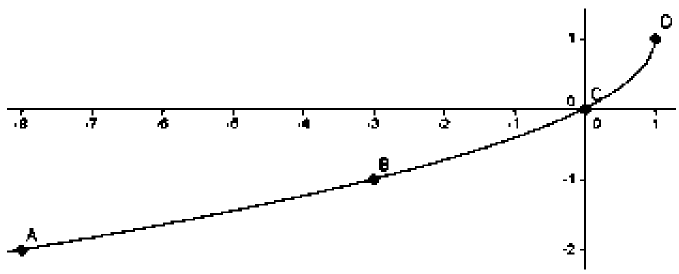


$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^{+}} y = ۰ \ ,\ \lim_{x\to ۲^{-}} y = ۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۲} y$$ وجود ندارد

د)

$$a=-۳\ ,\ y=۱-\sqrt{۱-x}\ ,$$

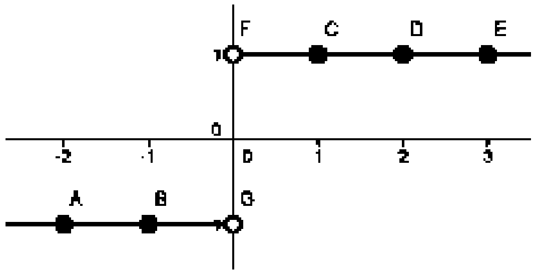
$$\begin{array}{c|cccc} x & -۸ & -۳ & ۰ & ۱ \\ \hline y & -۲ & -۱ & ۰ & ۱ \end{array} \Rightarrow \lim_{x\to -۳} y = -۱$$



ه) $a = \cdot \ , \ y = \dfrac{x}{|x|}$,

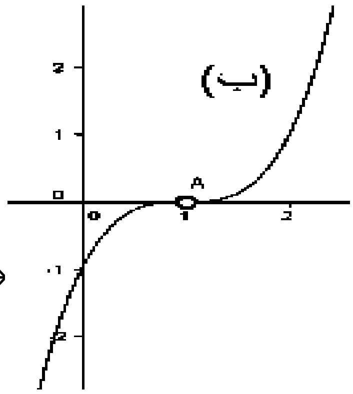
x	-۲	-۱	۱	۲	۳
y	-۱	-۱	۱	۱	۱

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \cdot^+} y = ۱ \ , \ \lim\limits_{x \to \cdot^-} y = -۱ \Rightarrow \lim\limits_{x \to \cdot} y$ وجود ندارد



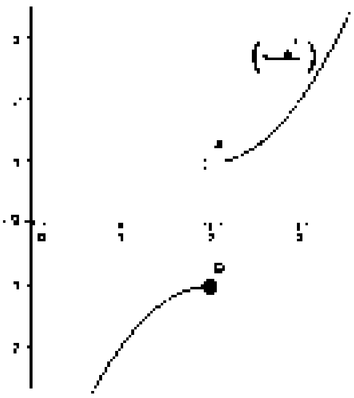
۳- وقتی مقدار x در آن همسایگی به a نزدیک می شود مقدار y برای هر دوتابع f , g یکسان است.
یعنی اگر مقدار $f(x)$ به عددی نزدیک شود معادل آن یعنی $g(x)$ هم به همان عدد نزدیک میشود.

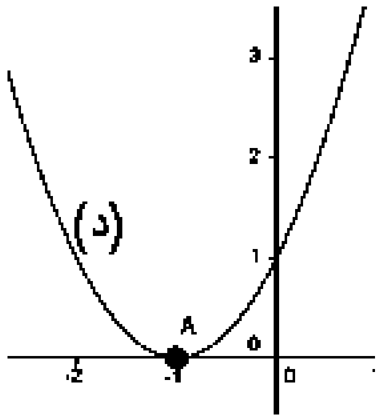
۴-



$\lim\limits_{x \to ۱^+} y = \lim\limits_{x \to ۱^-} y = \cdot \ , ۱ \notin D_f \longrightarrow$

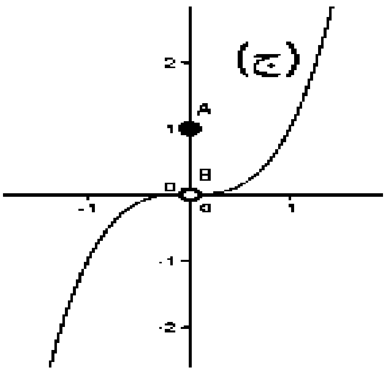
$\longleftarrow \lim\limits_{x \to ۲^+} y = ۱ \ , \ \lim\limits_{x \to ۲^-} y = -۱$

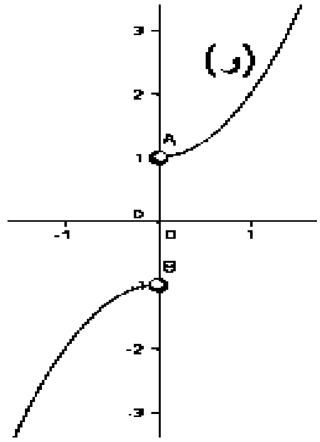




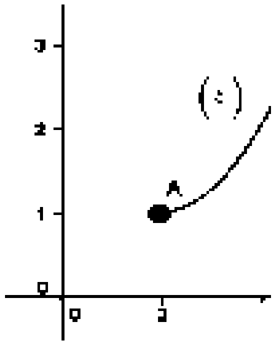
$\longleftarrow \lim\limits_{x \to \cdot^+} y = \lim\limits_{x \to \cdot^-} y = \cdot \ , f(\cdot) = ۱$

$\lim\limits_{x \to -۱^+} y = \lim\limits_{x \to -۱^-} y = \cdot = f(-۱) \longrightarrow$



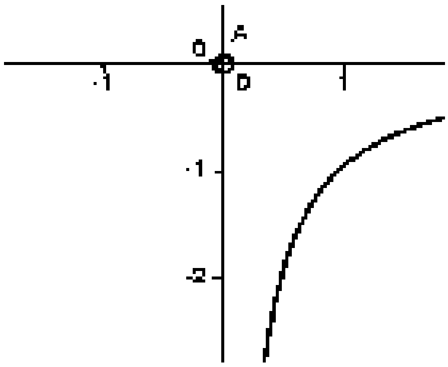


$\lim\limits_{x\to ۲^+} y = ۱ \ , \ \lim\limits_{x\to ۲^-} y$ وجود ندارد $\longleftarrow$

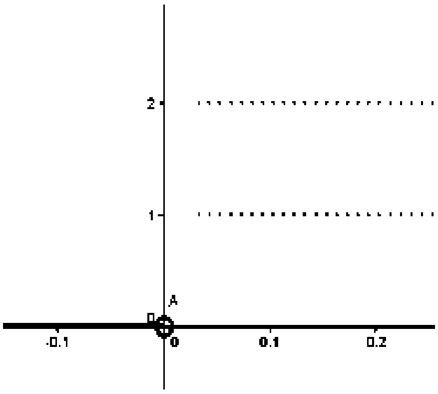


$\lim\limits_{x\to ۰^+} y = ۱ \ , \ \lim\limits_{x\to ۰^-} y = -۱ \ , ۰ \notin D_f \longrightarrow$

تابع در $x = ۰$ دارای حد چپ برابر صفر است ولی از راست چون اعداد گویا و گنگ دربین هم پراکنده اند ، مقدار تابع دو مقدار ۲ , ۱ را اختیار میکند و به هیچکدام نزدیک نمی شود.



$$f(x) = y = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۱ & x > ۰ , x \in Q \\ ۲ & x > ۰ , x \notin Q \end{cases}$$



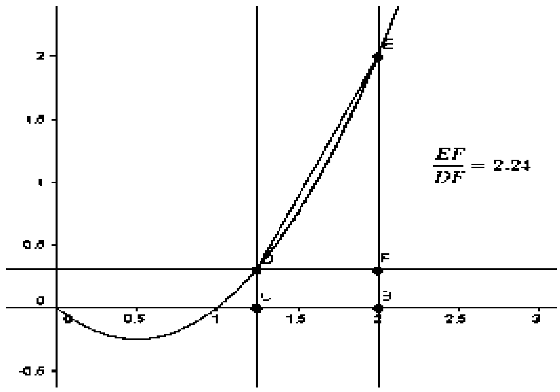
$$g(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ -\dfrac{۱}{x} & x > ۰ \end{cases}$$

۵- $x(t) = t^۲ - t \ , t \geq ۰ \Rightarrow$

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۰	۰	۲	۶	۱۲

$\dfrac{\Delta_x}{\Delta t}$	$\dfrac{x(۲/۱) - x(۲)}{۲/۱ - ۲}$	$\dfrac{x(۲/۰۱) - x(۲)}{۲/۰۱ - ۲}$	$\dfrac{x(۲/۰۰۱) - x(۲)}{۲/۰۰۱ - ۲}$
answer	۳/۱	۳/۰۱	۳/۰۰۱

سرعت متوسط در نزدیکی $t = ۲$ به عدد ۳ نزدیک می شود یعنی سرعت لحظه ای در لحظه $t = ۲$ برابر ۳ است.



۶- شیب مماس حد میزان تغییرات y به میزان تغییرات x در همسایگی نقطه مورد نظر است.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{f(۱/۱)-f(۱)}{۱/۱-۱}$	$\frac{f(۱/۰۱)-f(۱)}{۱/۰۱-۱}$	$\frac{f(۱/۰۰۱)-f(۱)}{۱/۰۰۱-۱}$
$answer$	۱/۲	۱/۰۲	۱/۰۰۲

این میزان به عدد ۱ نزدیک می شود پس شیب در $(۱,-۱)$ برابر ۱ است.

معادله مماس $A=(۱,-۱)\ ,\ m=۱\ ,\ y-y_۱=m(x-x_۱)\Rightarrow y+۱=۱(x-۱)\Rightarrow y=x-۲$

۱-

الف) $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)=\sqrt{4}+2=4$

ب) $\lim_{x\to 1}\frac{x^{n}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)=n-1+1=n$$

ج) $\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}+\sin^{2}x}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}}{x^{2}}+\frac{\sin^{2}x}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}1+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2}=1+1^{2}=2$

د) $\lim_{x\to -1}\frac{x^{3}+x+2}{x^{2}-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^{2}-x+2)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^{2}-x+2}{x-1}=\frac{1+1+2}{-1-1}=-2$

ه) $\lim_{x\to 0}x^{2}\sin\sqrt{x+1}=0\times\sin(1)=0$

و) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{2}x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{2}x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=2$

ز) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^{2}(\frac{x}{2}))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^{2}(\frac{x}{2})}{(\frac{4}{x})(\frac{x^{2}}{4})}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^{2}=\frac{0}{2}\times 1=0$

ح) $\lim_{x\to \pi}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{1-\cos\pi}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$

ط)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x-\cos x}=-(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4})==-\sqrt{2}$$

۲- هنگامی که x به a نزدیک می شود اگر $f(x)$ به L نزدیک شود به معنای آنست که فاصله $f(x)$ تا L کم و کمتر شده وبه صفر نزدیک می شود به عبارت دیگر مقدار $f(x)-L$ به صفر نزدیک می شود ، یعنی $\lim_{x\to a}f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to a}f(x)-L=0$.

به بیان ریاضی می توان نوشت $\lim_{x\to a}f(x)-L=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}L=L-L=0$

۳- برای مقادیری از x که $f(x)$ مثبت است(قسمتی ازنمودار که بالای محور x هاست) دو تابع $|f|$, f برابرند و برای مقادیری از x که $f(x)$ منفی است (زیر محور x ها) به جای آنکه تابع از مقادیر منفی به صفر نزدیک شود از مقادیر مثبت به صفر نزدیک می شود.در هرحال حد ۰ است.

۴- برهان خلف) اگر $f+g$ در $x=a$ دارای حد باشد چون f در $x=a$ حد دارد بنابر قضایای حد $(f+g)-f=g$ هم در $x=a$ حد دارد که خلاف فرض است.

۵-

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}-1 & x>0\\ 1 & x<0\end{cases},\ (f+g)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}=0\ ,\ x\neq 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=1\ ,\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=-1\ ,\ \lim_{x\to 0^+}g(x)=-1\ ,\ \lim_{x\to 0^-}g(x)=1\ ,\ \lim_{x\to 0^+}(f+g)_{(x)}=0$$

یا $h(x)=\frac{1}{x}\ ,\ k(x)=-\frac{1}{x}$ هر دودر $x=0$ حد ندارند ولی مجموع دو تابع یعنی $h(x)+k(x)=0$ در $x=0$ حد دارد.

۶- مثال ۱)
$$f(x)=|x|\ ,\ g(x)=\frac{|x|}{x}\ ,\ (f.g)_{(x)}=\frac{|x|^{2}}{x}=\frac{x^{2}}{x}=x\ ,x\neq 0$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^{+}} g(x)=1\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^{-}} g(x)=-1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ وجود ندارد

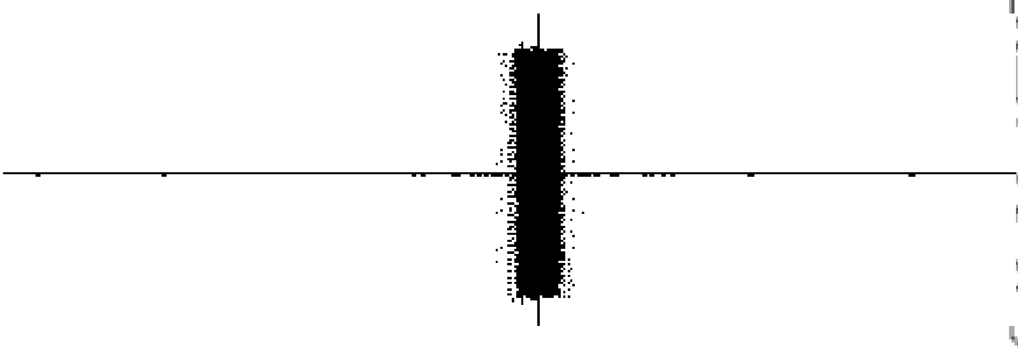
$$\lim_{x\to 0}(f.g)_{(x)}=\lim_{x\to 0}x=0$$

مثال ۲) یا $f(x)=x\ ,\ g(x)=\frac{1}{x}$ که f در $x=0$ حد داردولی g دارای حد نیست اما $f(x).g(x)=x(\frac{1}{x})=1$ در $x=0$ دارای حدی برابر ۱ است.

۷- بلی در اطراف صفر تعریف شده است.خیر زیرا به ازای $x=\frac{1}{2k\pi}\ ,\ k\in Z$ مقدار $\sin\frac{1}{x}$ برابر صفر و به ازای $x=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\ ,\ k\in Z$ مقدار $\sin\frac{1}{x}$ برابر ۱ می باشد و این دو عبارت را به ازای k ی مناسب به هر میزان دلخواه می توان به صفر نزدیک گرفت. بنابراین در همسایگی صفر به هیچ عدد ثابتی نزدیک نمی شود و حد ندارد.

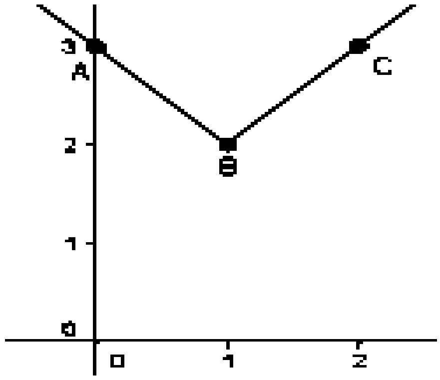
$$|\sin\frac{1}{x}|\leq 1\ ,\ |x|\geq 0\Rightarrow |x|\times|\sin\frac{1}{x}|\leq|x|\times 1\Rightarrow|x\sin\frac{1}{x}|\leq|x|\ ,\ \lim_{x\to 0}|x|=0$$

پس طبق ق فشردگی $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.



۱- الف)

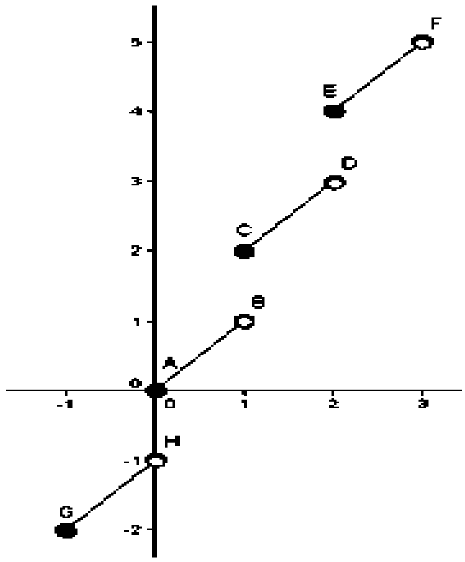
$$y=|x-۱|+۲ \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۳ & ۲ & ۳ \end{array}$$



تابع در تمام نقاط پیوسته است و ناپیوستگی ندارد.

ب)

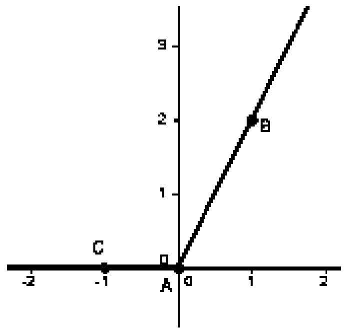
$$y=x+[x]=\begin{cases} \ldots & \ldots \\ x \quad ۰\le x<۱ \ , & \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array} \\ x+۱ \quad ۱\le x<۲ \ , & \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۲ & ۳ \end{array} \\ x+۲ \quad ۲\le x<۳ \ , & \begin{array}{c|cc} x & ۲ & ۳ \\ \hline y & ۴ & ۵ \end{array} \\ \ldots & \ldots \end{cases}$$



تابع در تمام نقاط $x=n\in Z$ ناپیوسته است.

ج)

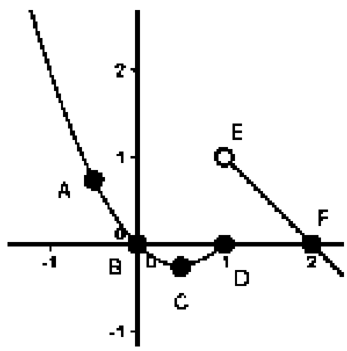
$$y=x+|x|=\begin{cases} ۲x \quad x\ge ۰ \ , & \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۰ & ۲ \end{array} \\ ۰ \quad x<۰ \ , & \begin{array}{c|cc} x & ۰ & -۱ \\ \hline y & ۰ & ۰ \end{array} \end{cases}$$



تابع در تمام نقاط $x\in R$ پیوسته است و ناپیوستگی ندارد.

د)

$$y=\begin{cases} x(x-۱) \quad x\le ۱ \ , & \begin{array}{c|cccc} x & -\frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} & ۱ \\ \hline y & \frac{۳}{۴} & ۰ & -\frac{۱}{۴} & ۰ \end{array} \\ -x+۲ \quad x>۱ \ , & \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۱ & ۰ \end{array} \end{cases}$$



ادامه سوال ۱ قسمت (د)

تابع در تمام نقاط به جز $x = 1$ پیوسته است.

یادآوری: $x(x-1) = x^2 - x = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ پس رأس سهمی $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ است.

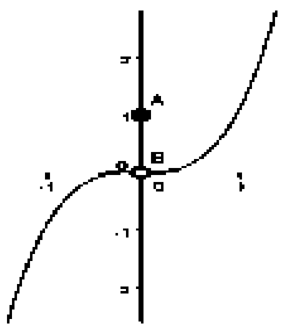
۲-

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} y = \lim\limits_{x \to 1^+} x - 2a = 1 - 2a \\ \lim\limits_{x \to 1^-} y = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 - ax + 1 = 1 - a + 1 = 2 - a \end{cases} \Rightarrow 1 - 2a = 2 - a \Rightarrow a = -1$$

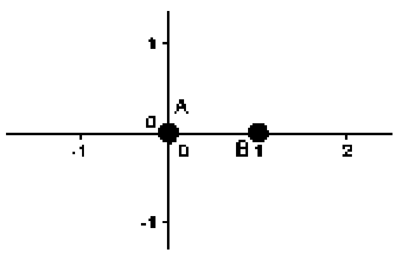
۳- برای پیوستگی تساوی اخیر باید برقرا باشد که دستگاهی بدون جواب است. پس به ازای هیچ مقدار از a تابع در $x = 0$ پیوسته نیست.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{ax}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{ax}{x} = a \\ \lim\limits_{x \to 0^-} y = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{ax}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{ax}{-x} = -a \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -a = 1$$

۴- تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ حد دارد، ولی در این نقطه پیوسته نیست.



۵- تابع در $x = 0$ حد راست ندارد ودر $x = 1$ حد چپ ندارد و دراین نقاط ناپیوسته است.



۶- اگر دو تابع g , f در $x=a$ پیوسته باشند یعنی $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$

آنگاه

$$\lim_{x\to a}(f+g)_{(x)}=\lim_{x\to a} f(x)+g(x)$$

$$=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=f(a)+g(a)=(f+g)_{(a)}$$

به همین روش

$$\lim_{x\to a}(f\times g)_{(x)}=\lim_{x\to a} f(x)\times g(x)$$

$$=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=f(a)\times g(a)=(f\times g)_{(a)}$$

ولی برای تقسیم اگر $g(x)$ در یک همسایگی a غیر صفر باشد آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$

۷- اگر تابع f در $x=a$ پیوسته بوده و تابع g در $x=f(a)$ پیوسته باشد

آنگاه تابع gof در $x=a$ پیوسته است و $\lim_{x\to a}(gof)_{(x)}=(gof)_{(a)}$

۱- الف) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a}=\cdot=f'(a)$

ب) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(\text{۳}x+\text{۵})-(\text{۳}a+\text{۵})}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\text{۳}(x-a)}{x-a}=\text{۳}=f'(a)$

ج) $\lim_{t\to a}\frac{x(t)-x(a)}{t-a}=\lim_{t\to a}\frac{t^{\text{۴}}-a^{\text{۴}}}{t-a}=\lim_{t\to a}\frac{(t-a)(t^{\text{۳}}+t^{\text{۲}}a+ta^{\text{۲}}+a^{\text{۳}})}{t-a}$

$$=a^{\text{۳}}+a^{\text{۳}}+a^{\text{۳}}+a^{\text{۳}}=\text{۴}a^{\text{۳}}=x'(a)$$

د) $\lim_{u\to a}\frac{y(u)-y(a)}{u-a}=\lim_{u\to a}\frac{\frac{u}{\text{۱}+u}-\frac{a}{\text{۱}+a}}{u-a}=\lim_{u\to a}\frac{\frac{u+ua-a-au}{(\text{۱}+u)(\text{۱}+a)}}{u-a}$

$$=\lim_{u\to a}\frac{u-a}{(\text{۱}+u)(\text{۱}+a)(u-a)}=\lim_{u\to a}\frac{\text{۱}}{(\text{۱}+u)(\text{۱}+a)}=\frac{\text{۱}}{(\text{۱}+a)^{\text{۲}}}$$

ه) $\lim_{x\to a}\frac{k(x)-k(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\text{۱}}{\sqrt{x}}-\frac{\text{۱}}{\sqrt{a}}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{xa}}}{(x-a)}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{xa}(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{-\text{۱}}{\sqrt{xa}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{-\text{۱}}{\text{۲}a\sqrt{a}}$$

۲- الف) $m=y'(\text{۱})=\lim_{x\to\text{۱}}\frac{\frac{\text{۱}}{\text{۱}+x^{\text{۲}}}-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}{x-\text{۱}}=\lim_{x\to\text{۱}}\frac{\frac{\text{۱}-x^{\text{۲}}}{\text{۲}(\text{۱}+x^{\text{۲}})}}{\frac{x-\text{۱}}{\text{۱}}}=\lim_{x\to\text{۱}}\frac{(\text{۱}-x)(\text{۱}+x)}{\text{۲}(\text{۱}+x^{\text{۲}})(x-\text{۱})}$

$$=\lim_{x\to\text{۱}}\frac{-(\text{۱}+x)}{\text{۲}(\text{۱}+x^{\text{۲}})}=-\frac{\text{۲}}{\text{۴}}=-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$

ادامه سوال ۲ (الف)

معادله مماس $x=1 \Rightarrow y(1)=\dfrac{1}{1+1^{2}}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow A(1,\tfrac{1}{2}) \Rightarrow y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}x+1$

معادله قائم $m=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow m'=2 \Rightarrow y-\dfrac{1}{2}=2(x-1) \Rightarrow y=2x-\dfrac{3}{2}$

ب)

$$m=y'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{4-x^{2}}-\sqrt{3}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{1-x^{2}}{(x+1)(\sqrt{4-x^{2}}+\sqrt{3})}$$

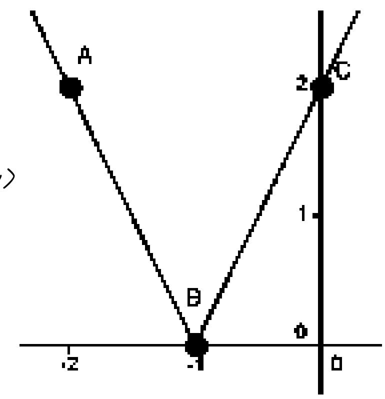
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(1-x)(1+x)}{(x+1)(\sqrt{4-x^{2}}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to -1}\frac{1-x}{(\sqrt{4-x^{2}}+\sqrt{3})}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x=-1 \Rightarrow y(-1)=\sqrt{4-(-1)^{2}}=\sqrt{3} \Rightarrow m=\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ A(-1,\sqrt{3})$$

معادله مماس $y-\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$$m=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m'=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}\ ,\ A(-1,\sqrt{3})$$

معادله قائم $\Rightarrow y-\sqrt{3}=-\sqrt{3}(x+1) \Rightarrow y-\sqrt{3}=-\sqrt{3}x-\sqrt{3} \Rightarrow y=-\sqrt{3}x$

۳- 

الف) $y(x)=2|x+1| \Rightarrow$

x	-2	-1	0
y	2	0	2

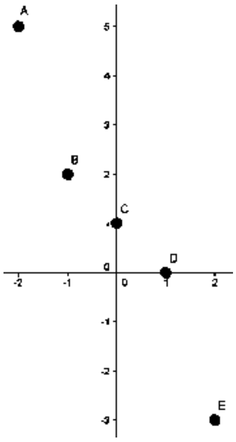
در نقطه $A(-1,0)$ (نقطه زاویه دار) مشتق پذیر نیست و

$$y'_{+}(-1)=\frac{2}{1}=2\ ,\ y'_{-}(-1)=\frac{-2}{1}=-2$$

ادامه سوال ۳

ب)

$$y(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\le 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -2 & -1 & 0 \\ \hline y & 5 & 2 & 1 \end{array} \\ -x^2+1 & x>0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 0 & -3 \end{array} \end{cases}$$



در تمام نقاط مشتق پذیر است $y'_+(0)=y'_-(0)=0$

ج) $y(x)=|1-x^2|=\begin{cases} 1-x^2 & -1\le x\le 1 \\ x^2-1 & x>1 \ \ or \ \ x<-1 \end{cases}$

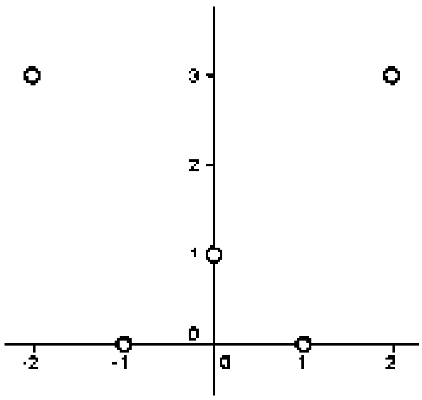
در نقاط $x=-1$, $x=1$ مشتق پذیر نیست زیرا

$$y'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

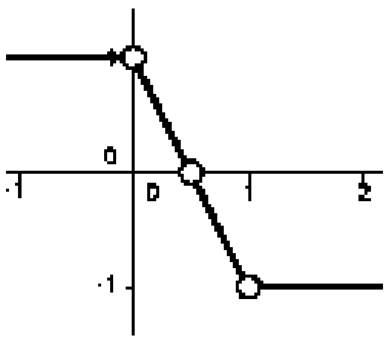
$$y'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(1-x)(1+x)}{x-1}=-2$$

$$y'_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{1-x^2-0}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{(1-x)(1+x)}{x+1}=2$$

$$y'_-(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-1-0}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=-2$$



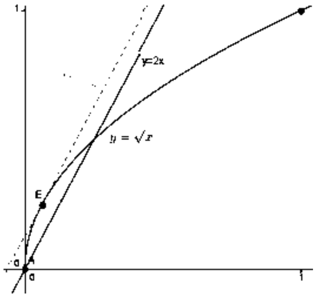
د) $y(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ -2x+1 & 0\le x\le 1 \\ -1 & x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & -1 \end{array}$



در نقاط $x=1$, $x=0$ مشتق پذیر نیست .

$y'_-(0)=0$, $y'_+(0)=-2$, $y'_+(1)=0$, $y'_-(1)=-2$

۴-



$$y_1(x)=\sqrt{x} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 4 & 9 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad , \quad y_2 = 2x \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

$$y'_1(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad y'_2(x)=2 \quad , \quad y'_1(x)=y'_2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}=2 \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{1}{16} \quad , \quad 2(\frac{1}{16})+b=\sqrt{\frac{1}{16}}$$

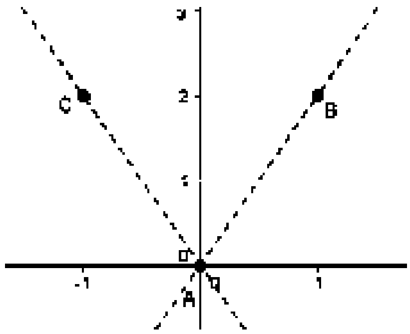
$$\Rightarrow b=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8} \Rightarrow y=2x+\frac{1}{8}$$

پس اگر به اندازه $\frac{1}{8}$ نمودار $y=2x$ را بالا ببریم دو نمودار در $A(\frac{1}{16},\frac{1}{4})$ مماس خواهند شد.

۵- نمودار $g(x)$ ازانتقال نمودار $f(x)$ به اندازه b واحد به بالا یا پائین به دست می آید(علامت b) بنابراین چون دو خط مماس مرسوم موازی می شوند شیب آنها تغییری نمی کند.
یعنی اگر مشتق آنها در نقطه دلخواه موجود باشد با هم برابر است.

$$g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+b-(f(a)+b)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

۶-



$$m_{OA}=\frac{a^2+1-0}{a-0}=\frac{a^2+1}{a}$$

$$m_{OA}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2+1)-(a^2+1)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=2a \Rightarrow \frac{a^2+1}{a}=2a \Rightarrow a^2+1=2a^2$$

$$\Rightarrow a=\pm 1 \Rightarrow A(1,2) \quad , \quad B(-1,2)$$

۷-

$$g'(b)=\lim_{x\to b}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}=\lim_{x\to b}\frac{f(ax)-f(ab)}{x-b}=\lim_{x\to b}a(\frac{f(ax)-f(ab)}{ax-ab})$$

$$=af'(ab) \Rightarrow g'(x)=af'(ax)$$

۱- الف) $y' = ۴x^{۳} + \frac{۴}{x^{۵}}$ ب) $y' = (۳x^{۲} - ۲x)(x - \sqrt{x} + ۵) + (۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{x}})(x^{۳} - x^{۲} - ۱)$

ج) $y' = ۲(۴ - ۳x)(x^{۲} + x + ۵) - ۳(۲x + ۱)(x^{۲} + x + ۵) + (۲x + ۱)^{۲}(۴ - ۳x)$

د) $y' = \frac{-۶x^{۲}}{(x^{۳} - ۱)^{۲}}$ ه) $y' = \frac{\sqrt{x} + ۲ - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x)}{(\sqrt{x} + ۲)^{۲}} = \frac{\sqrt{x} + ۴}{۲(\sqrt{x} + ۲)^{۲}}$

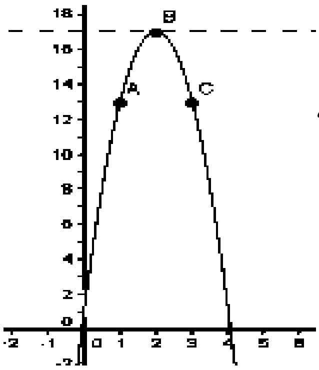
۲- موازی نیمساز ربع اول و سوم یعنی شیب برابر ۱ $(y'(x) = ۱)$

دو نقطه $y' = ۳x^{۲} - ۲ = ۱ \Rightarrow ۳x^{۲} = ۳ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow A(۱, -۷),\ B(-۱, -۵)$

۳- $y = -۴(x^{۲} - ۴x + ۴) + ۱۶ + ۱ = -۴(x - ۲)^{۲} + ۱۷ \Rightarrow$

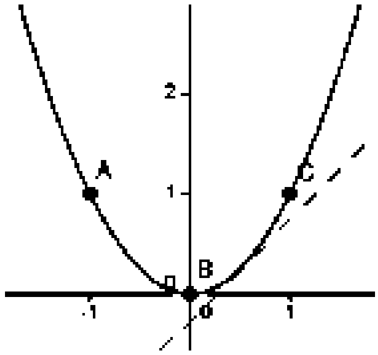
x	۱	۲	۳
y	۱۳	۱۷	۱۳

مماس موازی محور x ها یعنی شیب برابر صفر پس $y' = -۸x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow x = ۲$



$x = ۲ \Rightarrow y = -۴(۲ - ۲)^{۲} + ۱۷ = ۱۷ \Rightarrow B(۲, ۱۷)$

فقط درنقطه B (رأس سهمی)مماس بر منحنی موازی محور x هاست، که این نقطه ماکسیمم تابع است.

۴- 

$y = x^{۲} \Rightarrow$

x	-۱	۰	۱
y	۱	۰	۱

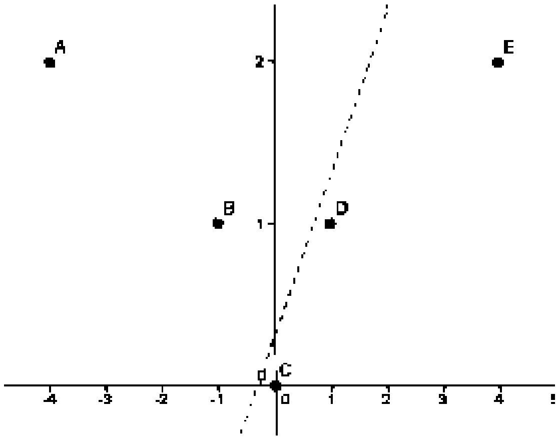
تنها یک نقطه این خاصیت رادارد.

$$\left.\begin{array}{r} y = mx + b \Rightarrow y' = m \\ y = x^{۲} \Rightarrow y' = ۲x \end{array}\right\} \Rightarrow ۲x = m \Rightarrow x = \frac{m}{۲}$$

ادامه سوال ٤

$$y=\sqrt{|x|}\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -۴ & -۱ & ۰ & ۱ & ۴ \\ \hline y & ۲ & ۱ & ۰ & ۱ & ۲ \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=mx+b\Rightarrow y'=m \\ y=\sqrt{|x|}\Rightarrow y'=\dfrac{|x|}{۲x\sqrt{|x|}},x\neq ۰ \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases} if\ \ m>۰\Rightarrow x>۰\Rightarrow x=\dfrac{۱}{۴m^{۲}} \\ if\ \ m<۰\Rightarrow x<۰\Rightarrow x=-\dfrac{۱}{۴m^{۲}} \end{cases}$$

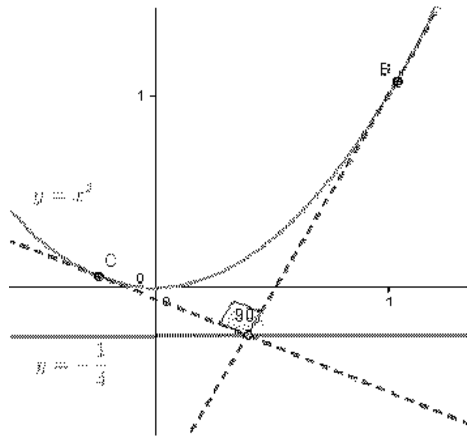


اگر m مثبت باشد محل برخوردطول مثبت و

اگر m منفی طول محل برخورد منفی است.

در هر صورت تنها یک نقطه دارای خاصیت مفروض است.

۵-



$$y=x^{۲}\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -۱ & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}$$

$$m=\frac{y-a^{۲}}{x-a}=۲a\Rightarrow y=۲ax-a^{۲}\ ①$$

$$m'=\frac{y-b^{۲}}{y-b}=۲\Rightarrow y=۲bx-b^{۲}\ ②$$

$$m\times m'=-۱\ ,\ ①,\ ②\Rightarrow ۲a\times ۲b=-۱\Rightarrow ab=-\frac{۱}{۴}\ ③$$

پس باید مقادیر a,b را چنان یافت که $ab=-\frac{۱}{۴}$ که بیشمار جواب دارد . در این صورت

با حل دستگاه شامل ①,② داریم $\begin{cases} x=\dfrac{a+b}{۲} \\ y=ab=-\dfrac{۱}{۴} \end{cases}$ یعنی مجموعه جواب خط $y=-\frac{۱}{۴}$ است.

۶-

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x)-\left(\frac{1}{f}\right)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(a)-f(x)}{f(x).f(a)}}{\frac{x-a}{1}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-(f(x)-f(a))}{f(x).f(a)(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{-1}{f(x)f(a)}\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\frac{1}{f(a)^2}\times f'(a)$$

۷-

$$f(x)^k=x\Rightarrow(f(x)^k)'=(x)'\Rightarrow kf'(x).f(x)^{k-1}=1$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{k.f(x)^{k-1}}=\frac{1}{k.x^{\frac{k-1}{k}}}=\frac{1}{k}.x^{\left(\frac{1}{k}-1\right)}$$

۸-

$$r>0\ ,\ r=\frac{m}{n}\Rightarrow(x^r)'=(x^{\frac{m}{n}})'=((x^{\frac{1}{n}})^m)'=m(x^{\frac{1}{n}})'(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}$$

$$=m\left(\frac{1}{n}\right)(x^{\frac{1}{n}-1})(x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}})=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}=rx^{r-1}$$

$$r<0\ ,r=\frac{m}{n}\Rightarrow(x^r)'=((x^{-r})^{-1})'=(-1)(x^{-r})'(x^{-r})^{-2}$$

$$=(-1)((-r)(x^{-r-1})(x^{2r})=rx^{r-1}$$

۹-

$$y=6x^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{4}}\Rightarrow y'=6\left(\frac{1}{3}\right)(x)^{\frac{1}{3}-1}-3\left(\frac{1}{4}\right)(x^{\frac{1}{4}-1})$$

$$\Rightarrow y'=2x^{-\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

۱-
$$\left.\begin{array}{l} s=\pi R^{۲} \\ P=۲\pi R \Rightarrow R=\dfrac{P}{۲\pi}\end{array}\right\} \Rightarrow S=\pi\left(\frac{P}{۲\pi}\right)^{۲}=\frac{P^{۲}}{۴\pi} \Rightarrow S'=\frac{P}{۲\pi}$$

$$S_{\circ}=\pi=\pi R_{\circ}^{۲} \Rightarrow R_{\circ}=۱ \Rightarrow P_{\circ}=۲\pi(۱)=۲\pi \Rightarrow S'=\frac{۲\pi}{۲\pi}=۱$$

۲- الف) $\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}=۴t \Rightarrow R^{۳}=\frac{۳}{\pi}t \Rightarrow R=\sqrt[۳]{\frac{۳}{\pi}t}=\sqrt[۳]{\frac{۳}{\pi}}.\sqrt[۳]{t} \Rightarrow R'(t)=\sqrt[۳]{\frac{۳}{\pi}}.\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{t^{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۹\pi t^{۲}}}$

ب) $S=۴\pi R^{۲}=۴\pi\left(\sqrt[۳]{\frac{۳}{\pi}t}\right)^{۲}=۴\pi\left(\frac{۳}{\pi}t\right)^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow S'(t)=۸\left(\frac{۳}{\pi}t\right)^{-\frac{۱}{۳}}=۸\sqrt[۳]{\frac{\pi}{۳t}}$

ج) $S=۴\pi R^{۲} \Rightarrow R^{۲}=\frac{S}{۴\pi} \Rightarrow R=\sqrt{\frac{S}{۴\pi}} \Rightarrow R'(S)=\frac{۱}{۸\pi}\left(\frac{S}{۴\pi}\right)^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۴\sqrt{\pi S}}$

د) $S=۴\pi R^{۲} \Rightarrow S'(R)=۸\pi R \;, ۴۵۰۰\pi=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳} \Rightarrow R=\sqrt[۳]{۳۳۷۵}=۱۵$

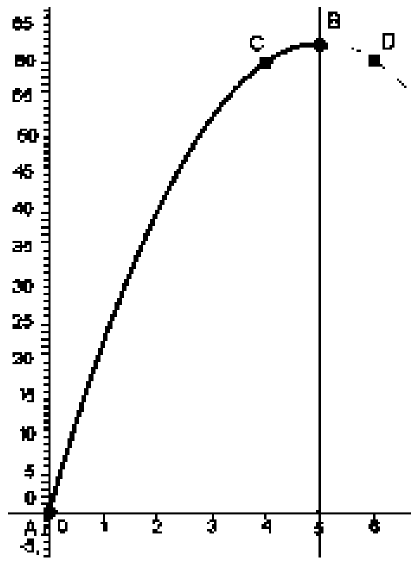
$$\Rightarrow S'(R)=۸\pi(۱۵)=۱۲۰\pi$$

۳- الف) $S(t)=۲۵t-\frac{۵}{۲}t^{۲}=-\frac{۵}{۲}(t-۵)^{۲}+\frac{۱۲۵}{۲} \Rightarrow$

t	۴	۵	۶
$S(t)$	۶۰	$\frac{۱۲۵}{۲}$	۶۰

دامنه اعتبار تابع از $t=۰$ تاتوقف کامل یعنی $S'(t)=۰$ است که

$S'(t)=۲۵-۵t=۰ \Rightarrow t=۵$ پس $D_{S}=[۰,+۵]$



ب) $V=S'(t)=۲۵-۵t=\;,\; t=۰ \Rightarrow V=۲۵-۵(۰)=۲۵ \, m/s$

ج) $V=۰ \Rightarrow ۲۵-۵t=۰ \Rightarrow t=۵$

د) توقف کامل $t=۵ \Rightarrow S(۵)=۲۵(۵)-\frac{۵}{۲}(۵)^{۲}=\frac{۱۲۵}{۲}=۶۲/۵$

۴- الف) $۱۰۰\times۳=۳۰۰$ متر فاصله رادر نه دقیقه طی کرده است.

ب) ۱۰۰ متر را در دودقیقه طی کرده است پس $v_۱=\frac{۱۰۰}{۲}=۵۰$ یعنی سرعت ۵۰ متر بر دقیقه است.

ج) ایستاده بوده است چون مسافتی طی نشده است.

د) ۱۰۰ متر را در یک دقیقه طی کرده پس با سرعت ۱۰۰ متر بر دقیقه به طرف خانه اش حرکت کرده است . (دویده)

ه) دم در خانه اش ایستاده بوده و برای خودش آواز می خوانده است.

و) چون ۳۰۰ متر رادر ۲ دقیقه طی کرده است ، می توان گفت با سرعت متوسط ۱۵۰ متر در دقیقه به طرف مدرسه می دویده است.

ز) دم در مدرسه ایستاده و منتظر بوده ببیند آیا معلم ریاضی می آید یا نه ؟؟؟!!!

۱-

الف) $y' = ۳\cos ۳x$ ب) $y' = \tan\frac{x}{۲} + \frac{x}{۲}(۱+\tan^۲\frac{x}{۲})$

ج) $y' = ۲(\cos ۲x)(۳\sin^۲ ۲x) = ۳\sin ۴x.\sin ۲x$ د) $y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^۲}$

ه) $y = \frac{۱}{\cot x + ۱} \Rightarrow y' = -۱(-۱)(۱+\cot^۲ x)(\cot x + ۱)^{-۲} = \frac{۱+\cot^۲ x}{(۱+\cot x)^۲}$

و) $y' = \frac{(۲x - \sin ۲x)(۱+\cos^۲ x) + \sin ۲x(x^۲ - \sin^۲ x)}{(۱+\cos^۲ x)^۲}$

۲-

$$y'(a) = \lim_{x\to a}\frac{\cos x - \cos a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{-۲\sin(\frac{x+a}{۲}).\sin(\frac{x-a}{۲})}{۲(\frac{x-a}{۲})} =$$

$$= \lim_{x\to a} -\sin(\frac{x+a}{۲}).\frac{\sin(\frac{x-a}{۲})}{(\frac{x-a}{۲})} = -\sin(\frac{a+a}{۲})\times ۱ = -\sin a$$

۳-

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x \ ,\ x = ۰ \Rightarrow \cos ۰ = ۱ = m = \tan\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}$$

$$y = \tan x \Rightarrow y' = ۱+\tan^۲ x \ ,x = ۰ \Rightarrow ۱+\tan^۲ ۰ = ۱ = m = \tan\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}$$

۴- موازی محور x ها است چون شیب صفراست. $y = \sin ۳x \Rightarrow y' = ۳\cos ۳x = ۰$

$$\cos ۳x = ۰ \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \pm \frac{\pi}{۶} \Rightarrow A(\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}, ۱), B(\frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۶}, -۱)$$

۵- شیب خط $y = ۳x - ۱$ برابر ۳ است. $y = \sin x + \cos x$

$$\Rightarrow y' = \cos x - \sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos(x + \frac{\pi}{۴}) = ۳ \Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{۴}) = ۳\sqrt{۲} > ۱$$ معادله جواب ندارد.

۶- شیب خط $y = mx + ۲$ برابر m است و

$$y = \tan ۳x \Rightarrow y' = ۳(۱ + \tan^{۲} ۳x) = \frac{۳}{\cos^{۲} ۳x} = m$$

$$\Rightarrow \cos^{۲} ۳x = \frac{۳}{m} \quad , \quad ۰ \le \cos^{۲} ۳x \le ۱ \Rightarrow ۰ \le \frac{۳}{m} \le ۱ \Rightarrow m \ge ۳$$

۷- $$y = ۱ + ۲\sin^{۲} ۲x = ۱ + ۲(\frac{۱ - \cos ۲x}{۲}) = ۲ - \cos ۲x \Rightarrow y' = ۲\sin ۲x$$

پس حرکت این متحرک به صورت تناوبی با دوره تناوب $T = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$ است.

$$y' = ۰ \Rightarrow ۲\sin ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \Rightarrow A(\frac{k\pi}{۲}, ۱) \quad or \quad B(\frac{k\pi}{۲}, ۳)$$

$$y'_{\max} = ۲ \ , \ \sin ۲x = \pm ۱ \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} = (۲k + ۱)\frac{\pi}{۴}$$

۱- الف) $y'=\frac{2x(1+x^2)-2x(x^2)}{(1+x^2)^2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}=\frac{x}{(1+x^2)^2}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}$

تابع در $x=0$ مشتق پذیر نیست .

ب) $f(t)=\cos\sqrt[3]{t}\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\times-\sin\sqrt[3]{t}=-\frac{\sin\sqrt[3]{t}}{3\sqrt[3]{t^2}}$ در $t=0$ مشتق پذیر نیست.

ج) $g(\alpha)=\sqrt[5]{1+\tan\alpha}\Rightarrow g'(\alpha)=(1+\tan^2\alpha)(\frac{1}{5\sqrt[5]{(1+\tan\alpha)^4}})=\frac{1+\tan^2\alpha}{5\sqrt[5]{(1+\tan\alpha)^4}}$

اگر $\tan\alpha=-1$ یعنی $\alpha=k\pi-\frac{\pi}{4}$ مشتق پذیر نیست.

البته در $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$ مشتق پذیر نیست که جزء دامنه نمی باشد.

د) $y(\alpha)=\tan^2(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}\alpha)$

$\Rightarrow y'(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}(1+\tan^2(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}\alpha))(2\tan(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}\alpha)$

اگر $\alpha=\pm1$ تابع مشتق پذیر نیست.

البته در $\alpha=\frac{1}{2}$ مشتق پذیر نیست که جزء دامنه نمی باشد.

ه) $x(t)=\sqrt{1+\sqrt{1+t^2}}\Rightarrow x'(t)=2t(\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}})(\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+t^2}}})=\frac{t}{2\sqrt{1+t^2}.\sqrt{1+\sqrt{1+t^2}}}$

زیر رادیکالها مثبت و مخرج هیچگاه صفر نمی شود پس در تمام نقاط مشتق پذیر است.

$$k(z)=\sqrt{۱+\cos^{۲}\sqrt{۱+z^{۲}}}$$

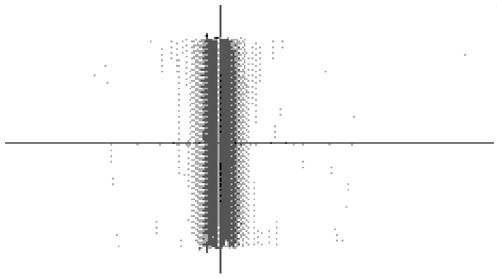
و)
$$\Rightarrow k'(z)=۲z\left(\frac{۱}{۲\sqrt{۱+z^{۲}}}\right)\left(-\sin\sqrt{۱+z^{۲}}\right)\left(۲\cos\sqrt{۱+z^{۲}}\right)\left(\frac{۱}{۲\sqrt{۱+\cos^{۲}\sqrt{۱+z^{۲}}}}\right)$$

$$\Rightarrow k'(z)=\frac{-z\sin ۲\sqrt{۱+z^{۲}}}{۲\sqrt{۱+z^{۲}}.\sqrt{۱+\cos^{۲}\sqrt{۱+z^{۲}}}}$$

زیر رادیکالها مثبت و مخرج هیچگاه صفر نمی شود پس در تمام نقاط مشتق پذیر است.

-۲

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{x\sin\frac{۱}{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\sin\frac{۱}{x}$$ وجو ندارد



$$g'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}\sin\frac{۱}{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}x.\sin\frac{۱}{x}=۰$$

(زیرا $-۱\le\sin\frac{۱}{x}\le ۱\Rightarrow -x\le x.\sin\frac{۱}{x}\le x$ و حد دوطرف نامساوی صفر است ،

پس طبق قضیه فشردگی $\lim_{x\to ۰}x\sin\frac{۱}{x}=۰$)

-۳

$$D_f=[-\infty,+\infty]=R\ ,\ R_f=[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$$

$$T=۲\pi\Leftrightarrow f(x+۲\pi)=\sin^{-۱}(\sin(x+۲\pi))=\sin^{-۱}(\sin(x))=f(x)$$

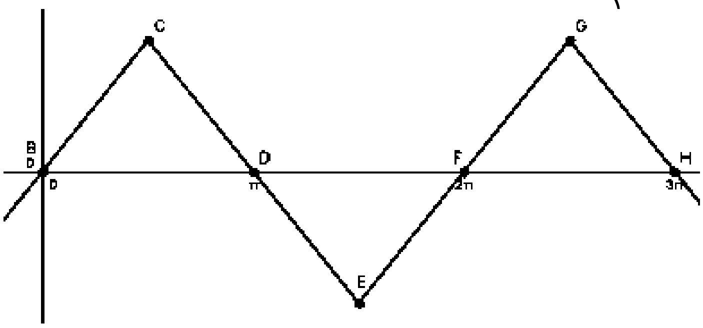
$$f(x)=\sin^{-۱}(\sin x)\Rightarrow$$

x	$-\frac{\pi}{۲}$	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π	$\frac{۵\pi}{۲}$	۳π
y	$-\frac{\pi}{۲}$	۰	$\frac{\pi}{۲}$	۰	$-\frac{\pi}{۲}$	۰	$\frac{\pi}{۲}$	۰

ادامه سوال ۳ در نقاطی که $x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ مشتق ناپزیر است.

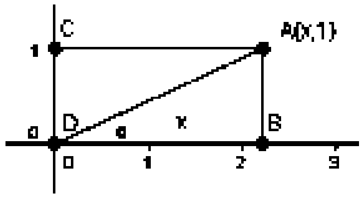
در نقاطی که $(۴k-۱)\frac{\pi}{۲}<x<(۴k+۱)\frac{\pi}{۲}$ شیب ۱+ است پس $f'(x)=+۱$

در نقاطی که $(۴k+۱)\frac{\pi}{۲}<x<(۴k+۳)\frac{\pi}{۲}$ شیب ۱− است پس $f'(x)=-۱$



۴−

$$\tan\alpha=\frac{۱}{x}\Rightarrow\alpha=\tan^{-۱}(\frac{۱}{x})\ ,\ D_{\alpha(x)}=R\ ,\ R_{\alpha(x)}=(۰,\pi)$$



$$\alpha'(x)=-\frac{۱}{x^۲}(\frac{۱}{۱+(\frac{۱}{x})^۲})=-\frac{۱}{x^۲}(\frac{x^۲}{x^۲+۱})=-\frac{۱}{x^۲+۱}$$

مقدار α ب افزایش x کاهش می یابد و علامت $\alpha'(x)$ همواره منفی بنابراین تابع اکیدا نزولی.

۵−

الف)

$$L^۲=۲^۲+۴^۲-۲(۲\times۴)\cos\alpha=۲۰-۱۶\cos\alpha\quad,\ ۰<\alpha<۱۸۰$$

$$\Rightarrow D_{L(\alpha)}=(۰,۱۸۰)\ ,\ L=\sqrt{۲۰-۱۶\cos\alpha}\ ,L>۰\Rightarrow R_{L(\alpha)}=(۰,+\infty)$$

نکته) چون $\cos\alpha\le۱$ بنابراین $۲۰-۱۶\cos\alpha>۰$ همواره برقرار است.

ب) $L^۲=۲۰-۱۶\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۲۰-L^۲}{۱۶}\Rightarrow\alpha=\cos^{-۱}(\frac{۲۰-L^۲}{۱۶})$

$$\sin(۱۸۰-\alpha)=\frac{h}{۲}\Rightarrow h=۲\sin\alpha\ ,\ S=\frac{۴\times h}{۲}=۲h=۴\sin\alpha$$

ج)

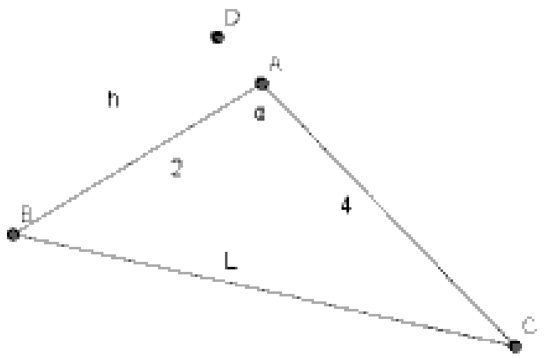
$$\Rightarrow S'(\alpha)=۴\cos\alpha\Rightarrow\begin{cases}۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow S'(\alpha)>۰\\ \frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi\Rightarrow S'(\alpha)<۰\end{cases}$$

ادامه سوال ۵ برای $\cdot<\alpha<\frac{\pi}{۲}$ آهنگ افزایش مساحت صعودی است (هنگامیکه زاویه α تند است)

برای $\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi$ آهنگ افزایش مساحت نزولی است (هنگامیکه زاویه α باز است)

$S'(\alpha)=\cdot \Rightarrow \cos\alpha=\cdot \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۲}$ پس بیشترین مقدار مساحت زمانی است که مثلث قائمه الزاویه است .

$$S(\frac{\pi}{۲})=۴\sin(\frac{\pi}{۲})=۴$$



۶-

$$R=۱\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\alpha}{۲})=\frac{\frac{l}{۲}}{۱}\Rightarrow l=۲\sin(\frac{\alpha}{۲})$$

$$R=۱\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{\alpha}{۲})=\frac{h}{۱}\Rightarrow h=\cos(\frac{\alpha}{۲})$$

$$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}AB\times h=\frac{۱}{۲}l.\cos(\frac{\alpha}{۲})=\frac{۱}{۲}(۲\sin(\frac{\alpha}{۲}))\cos(\frac{\alpha}{۲})=\frac{۱}{۲}\sin\alpha$$

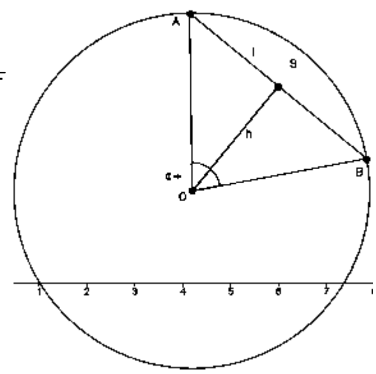
(سبز)هاشورخورده $S=\alpha$ مساحت قطاع $-OAB$ مساحت مثلث $S=\frac{\alpha}{۲}-\frac{۱}{۲}\sin\alpha$ ①

$$l=۲\sin\frac{\alpha}{۲}\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{l}{۲}\Rightarrow \alpha=۲\sin^{-۱}(\frac{l}{۲}) \quad ②$$

$$①,② \Rightarrow S=\sin^{-۱}(\frac{l}{۲})-\frac{۱}{۲}\sin(۲\sin^{-۱}(\frac{l}{۲}))=\sin^{-۱}(\frac{l}{۲})-\frac{۱}{۲}(۲\frac{l}{۲})(\sqrt{۱-\frac{l^۲}{۴}}$$

$$\Rightarrow S=\sin^{-۱}(\frac{l}{۲})-\frac{l}{۴}\sqrt{۴-l^۲} \quad ③$$

$$①\Rightarrow S'(\alpha)=\frac{۱}{۲}--\frac{۱}{۲}\cos\alpha \quad , \quad ②\Rightarrow \alpha'(l)=\frac{۱}{\sqrt{۱-\frac{l^۲}{۴}}}=\frac{۲}{\sqrt{۴-l^۲}}$$



$$③\Rightarrow S'(l)=\frac{۱}{\sqrt{۴-l^۲}}-\frac{۱}{۴}\sqrt{۴-l^۲}+\frac{l^۲}{۴\sqrt{۴-l^۲}}=\frac{l^۲}{۲\sqrt{۴-l^۲}}$$