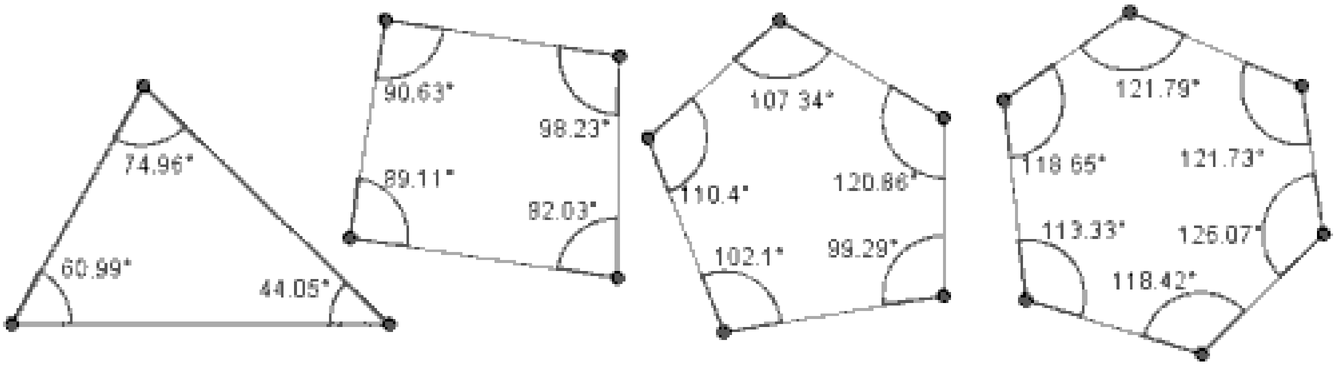
فهرست مطالب حل مسائل هندسه ۲ سوم ریاضی :

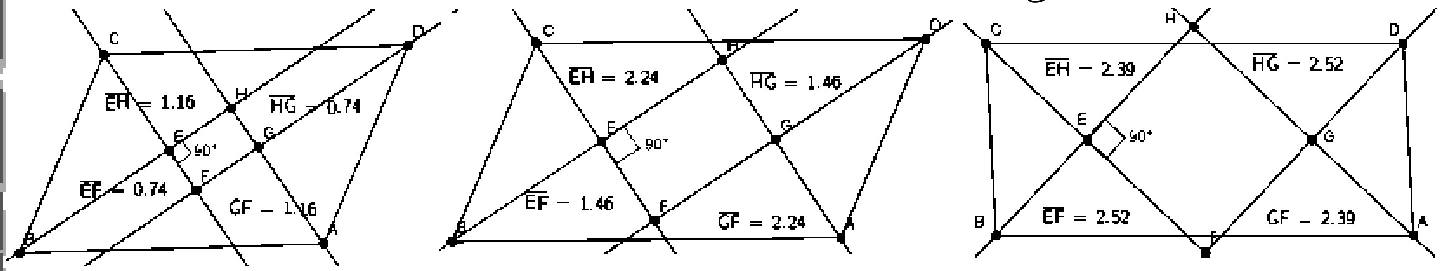
۱- محاسبه جمع زوایا حدس:

n	۳	۴	۵	۶	n
Sum_{α}	۱۸۰	۳۶۰	۵۴۰	۷۲۰	?

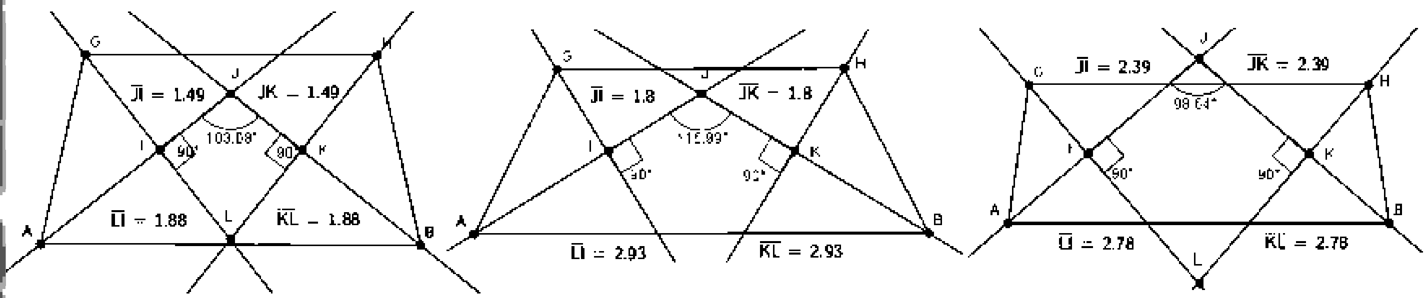
$$\Leftarrow \quad Sum_{\alpha} = (n-۲)\times ۱۸۰^{\circ}$$



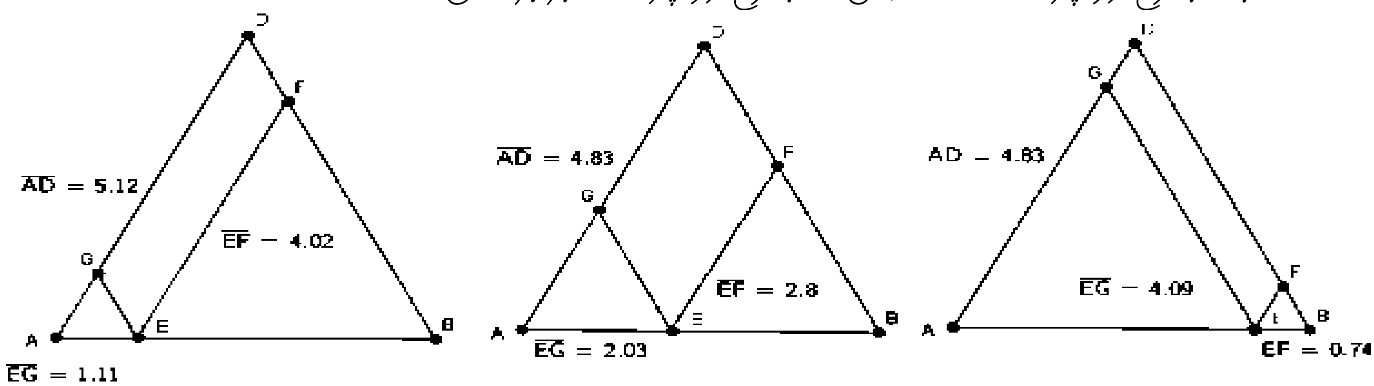
۲- اندازه گیری زوایا و اضلاع حدس: مستطیل



۳- اندازه گیری زوایا و اضلاع محل برخورد حدس: شبه لوزی با زاویه قائمه



٤- محاسبه مجموع دو پاره خط حدس : مجموع دو پاره خط برابر ساق مثلث

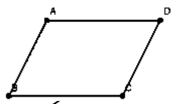


۱- الف) مثلث ABC ب) سواد ریاضی داشته باشد. پ) مساله را بفهمد.

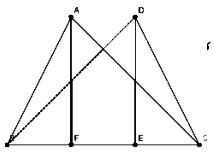
۲- الف) درست (کلمه همه) ب) نادرست (کلمه بعضی)

۳- الف) نادرست مثل ۱۵۰ , ۳۰درجه ب) نادرست مثل سه نقطه روی شیرازه کتاب و صفحات آن

٤- الف) اگر چهار ضلعی مستطیل باشد آنگاه متوازی الاضلاع است. عکس آن صحیح نیست زیرا هر متوازی الاضلاعی مستطیل نیست.



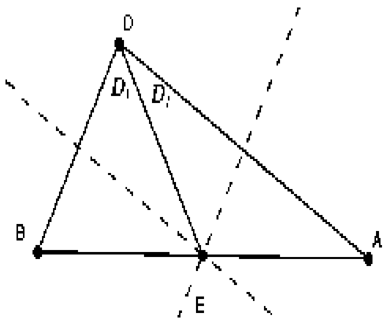
ب) اگر دو مثلث همنهشت باشندآنگاه مساحت آنها برابر است.عکس آن صحیح نیست ، چون ممکن است دو مثلث هم قاعده و ارتفاع باشند ولی همنهشت نباشند.



پ) اگر دو مثلث متشابه باشند آنگاه ضلعهای متناظر متناسبند .عکس آن صحیح است(قضیه هندسه ۱)

ت) اگر مثلثی قائم الزاویه باشد آنگاه عمود منصفهای اضلاع در وسط وتر همرس می شوند .

عکس آن صحیح است.(اگرعمودمنصفهای دوضلع دروسط ضلع سوم همرس شوند،مثلث قائم الزاویه است)



اثبات) $\hat{B} = \hat{D}_1 \Leftarrow ED = BD \Leftarrow E$روی عمود منصف BDاست .

$\hat{A} = \hat{D}_2 \Leftarrow ED = AE \Leftarrow E$روی عمود منصف AD .

$$\hat{B} + \hat{A} + \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180 \Rightarrow 2\hat{B} + 2\hat{A} = 180 \Rightarrow \hat{B} + \hat{A} = 90 \Rightarrow \hat{D} = 90$$

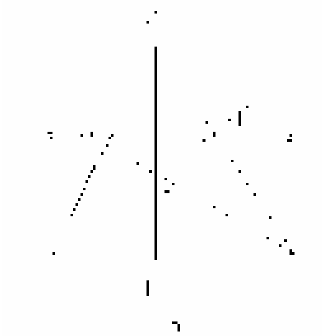
ث) اگرکسی درشیراز زندگی می کند آنگاه در استان فارس است عکس آن صحیح نیست ممکن است در فسا یا کازرون باشد.

۵- اگر خطی دو ضلع مثلث را قطع کند، پاره خطهای حاصل بر اضلاع متناسبند اگر و تنها اگر ، این خط با ضلع سوم موازی باشد .

٦- $BT = BU \Rightarrow B\hat{T}U = B\hat{U}T, B\hat{T}N > B\hat{T}U \Rightarrow B\hat{T}N > B\hat{U}T$

۷- اگر در مرحله $n-1$ ام تعدادمثلثها را $(n-1)^2$ در نظر بگیریم در حالت n ام به آن ، ذوزنقه ای شامل $2(n-1)+1=2n-1$ مثلث افزوده می شود . پس در حال n ام تعداد مثلثها برابر $(n-1)^2+2n-1=n^2-2n+1+2n-1=n^2$ است .

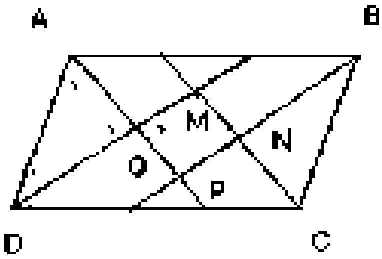
۸- $S_{ABC}=S_{AOB}+S_{AOC}+S_{BOC}\Rightarrow S=\frac{1}{2}a\times OH+\frac{1}{2}a\times OH'+\frac{1}{2}a\times OH''$



$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}a(OH+OH'+OH'')$$

$$\Rightarrow OH+OH'+OH''=\frac{2S}{a}$$ مقدار ثابت

۹- $\hat{A}+\hat{D}=180\Rightarrow\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{D}}{2}=90\Rightarrow\hat{A}_1+\hat{D}_1=90\Rightarrow\hat{Q}_1=90\Rightarrow\hat{Q}_2=90$



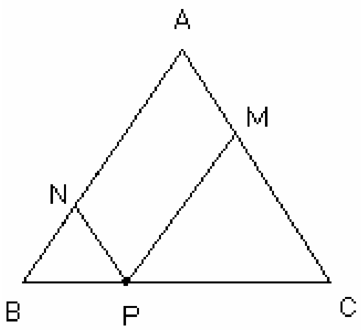
به همین ترتیب بقیه زوایای داخلی $MNPQ$ قائمه اند ،

پس $MNPQ$ مستطیل است.

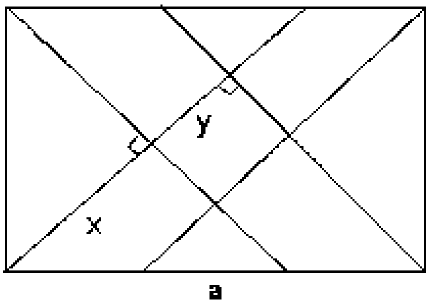
۱۰-

$$\begin{cases} MP\parallel AB\Rightarrow\frac{MP}{AB}=\frac{PC}{BC} & \text{نتیجه ق تالس}\\ NP\parallel AC\Rightarrow\frac{NP}{AC}=\frac{BP}{BC} & \text{نتیجه ق تالس}\end{cases}\Rightarrow\frac{MP}{a}+\frac{NP}{a}=\frac{PC+BP}{BC}=\frac{BC}{BC}=1$$

$$\Rightarrow\frac{MP+NP}{a}=1\Rightarrow MP+NP=a$$



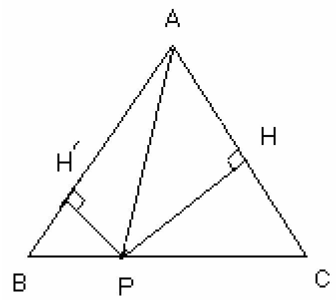
۱۱-



$$۲x^{۲}=b^{۲}\Rightarrow x=b\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ ۲(x+y)^{۲}=a^{۲}\Rightarrow$$

$$x+y=a\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow b\frac{\sqrt{۲}}{۲}+y=a\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow y=(a-b)\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

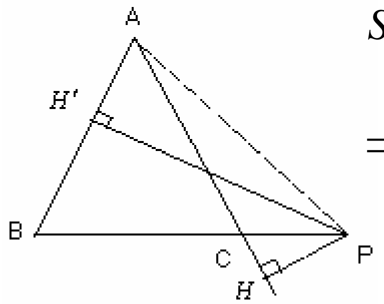
۱۲-



$$S_{ABC}=S_{ABP}+S_{APC}\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}a\times PH'+\frac{۱}{۲}a\times PH$$

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}a\left(PH'+PH\right)\Rightarrow PH'+PH=\frac{۲S}{a}$$

۱۳-

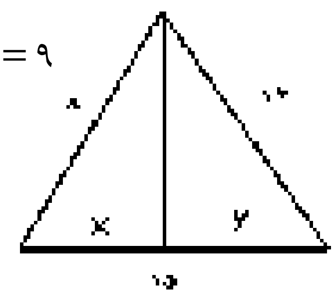


$$S_{ABC}=S_{ABP}-S_{APC}\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}a\times PH'-\frac{۱}{۲}a\times PH$$

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}a\left(PH'-PH\right)\Rightarrow PH'-PH=\frac{۲S}{a}$$

۱۴-

$$\begin{cases}\dfrac{y}{x}=\dfrac{۱۲}{۸}\Rightarrow ۸y=۱۲x\Rightarrow ۲y=۳x \\ x+y=۱۵\Rightarrow ۲x+۲y=۳۰\end{cases}\Rightarrow ۵x=۳۰\Rightarrow x=۶, y=۹$$

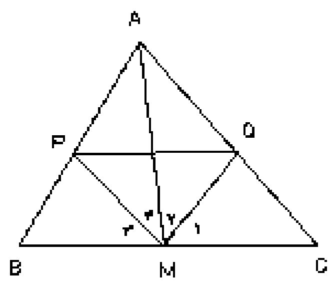


---

۱۵ -

$$\text{نیمساز } MP\Rightarrow\frac{AM}{MB}=\frac{AP}{PB}\ \text{و}\ \text{نیمساز } MQ\Rightarrow\frac{AM}{MC}=\frac{AQ}{QC}$$

$$\text{میانه } AM\Rightarrow MB=MC\Rightarrow\frac{AQ}{QC}=\frac{AP}{PB}\Rightarrow \text{عکس تالس } PQ\parallel BC$$



۱۶- ❸ $\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{M} = \hat{N} = 90 \\ AD = AD \end{cases} \Rightarrow$ وتر و یک زاویه $\Delta AMD \cong \Delta AND \Rightarrow DM = DN$

اگر قاعده دو مثلث را DC , BD بگیریم آنگاه ❶ $\dfrac{S}{S'} = \dfrac{\frac{1}{2} BD \times AH}{\frac{1}{2} DC \times AH} = \dfrac{BD}{DC}$

اگرقاعده دو مثلث را AC , AB بگیریم وباتوجه به ❸ آنگاه ❷ $\dfrac{S}{S'} = \dfrac{\frac{1}{2} AB \times DM}{\frac{1}{2} AC \times DN} = \dfrac{AB}{AC}$

از ❷, ❶ می توان نتیجه گرفت $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$

۱- حکم : حسن عامل تصادف نیست

برهان خلف : اگر حسن عامل تصادف باشد پس در محل حادثه حضور داشته که تناقض با این فرض قابل اثبات است(شاهد) که حسن در زمان تصادف در محل کارش بوده است.

۲- اگر a موازی c نباشد همرا در نقطه ای مانند A قطع می کنند و این به معنای آنست که از A دو خط $a\ ,\ c$ به موازات خط b رسم شده است که خلاف اصل توازی است.

۳- الف) خلف : اگر OM نیمساز $P\hat{M}N$ باشد پس

$$\begin{cases} N\hat{M}O = P\hat{M}O \\ MP = MN \\ OM = OM \end{cases} \Rightarrow \text{ض ض ض}\ \Delta OMN \cong \Delta OMP \Rightarrow ON = OP$$ خلاف فرض

ب) خلف : اگر OM بر NP عمود باشد پس

$$\begin{cases} N\hat{R}M = P\hat{R}M = ۹۰^\circ \\ MN = MP \\ MR = MR \end{cases} \Rightarrow \text{وتر و یک ضلع}\ \Delta MNR \cong \Delta MRP \Rightarrow NR = RP$$

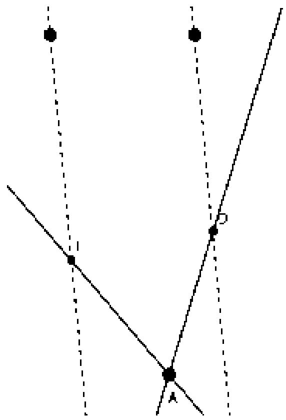
$$\begin{cases} NR = RP \\ N\hat{R}O = P\hat{R}O = ۹۰^\circ \\ OR = OR \end{cases} \Rightarrow \text{ض ز ض}\ \Delta ORN \cong \Delta ORP \Rightarrow ON = OP$$ خلاف فرض

---

۴) خلف : اگر $BC = B'c'$ آنگاه

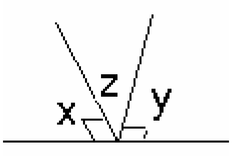
$$\begin{cases} BC = B'C' \\ AB = A'B' \\ AC = A'C' \end{cases} \Rightarrow \text{ض ض ض}\ \Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Rightarrow \hat{A} = \hat{A'}$$ خلاف فرض

۵- الف) اگر متقا طع نباشد پس با هم موازیند بنابراین مجموع نصف این دو زاو یه ۱۸۰ میشود ، که این با قضیه ، مجموع زوایای مثلث ۱۸۰ درجه است، در تناقض است.



ب) اگر دو میانه متقاطع نباشند آنگاه موازیند. ازطرفی دو رأس دیگر بر این دو ضلع موازیند و هم بر امتداد AF , AD که غیر ممکن است..

ت+پ) اگر د و ارتفاع یا عمودمنصف متقاطع نباشند پس موازیند و چون هر بر د وضلع عمودند ، تنها در صورتی امکان دارد که دو ضلع موازی و یا بر یک امتداد باشند که با تعریف مثلث ناسازگار است.



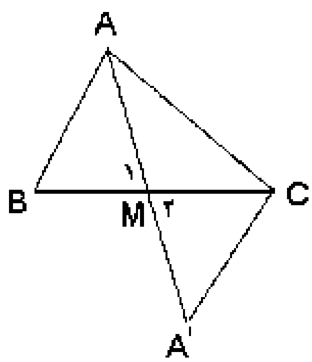
۶- اگرعمودمنصف یک پاره خط یکتانباشدپس $x+y+z=۱۸۰ \quad , \; x=y=۹۰ \Rightarrow z=۰$ که با فرض متمایز بودن دو عمود در تناقض است.

۷- طول اضلاع $۴(x-۱)+x+۷+۶x=۳۶ \Rightarrow ۱۱x+۳=۳۶ \Rightarrow ۱۱x=۳۳ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow ۸ \; , \; ۱۰ \; , \; ۱۸$
که نمی تواند طول اضلاع یک مثلث باشد زیرا $۸+۱۰=۱۸$ (خلاف نامساوی مثلثی)

---

۸ - $\begin{cases} AB=AC \\ AD=AD \Rightarrow \text{لا لو قضیه عکس} \; B\hat{A}D < D\hat{A}C \\ BD<DC \end{cases}$

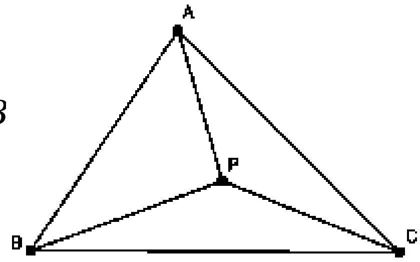
۹- AM را به اندازه ی خود تا A' امتداد می دهیم و به C وصل می کنیم ،



$\begin{cases} AM=A'M \\ BM=MC \\ \hat{M}_۱=\hat{M}_۲ \end{cases}$ ض ز ض $\Rightarrow \quad \Delta ABM \cong \Delta A'MC \Rightarrow AB=A'C$

$\Delta AA'C : AC+A'C > AA' \Rightarrow AC+AB > ۲AM \Rightarrow AM < \dfrac{AB+AC}{۲}$

۱۰-

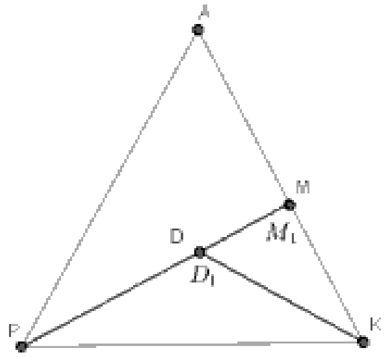


$$\begin{cases} PA+PC \succ AC \\ PA+PB \succ AB \Rightarrow 2PA+2PB+2PC \succ AC+AB+B \\ PB+PC \succ BC \\ PA+PB+PC \succ \dfrac{AC+AB+BC}{2} \end{cases}$$

۱۱- PD را امتداد می دهیم تا AK را در M قطع کند

خارجی $\hat{D}_1$: $\Delta MDK \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{M}_1$

خارجی $\hat{M}_1$: $\Delta APM \Rightarrow \hat{M}_1 > \hat{A} \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A}$



۱۲- الف)

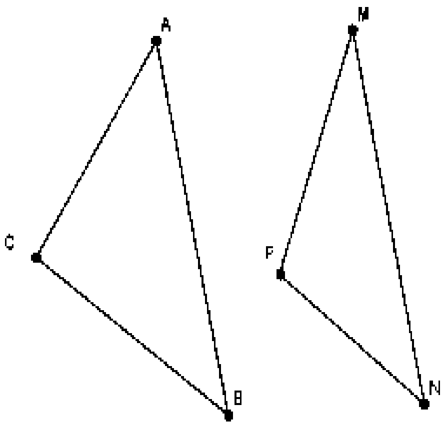
»]nBi $\begin{cases} PM = AK \\ AM = AM \\ P\hat{M}A > M\hat{A}K \end{cases} \Rightarrow$ (ق لولا) $AP > MK$

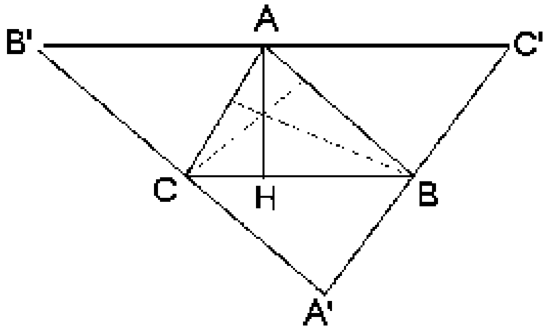
ب) $\Delta APM : A\hat{M}K$ »]nBi $\Rightarrow A\hat{M}K > \hat{P}, AM = AK \Rightarrow$

$A\hat{M}K = A\hat{K}M \Rightarrow A\hat{K}M > \hat{P} \Rightarrow \Delta APK : AP > AK$

تمرین : عکس قضیه لولا حکم $\hat{A} > \hat{M}$ $\Leftarrow$ فرض $\begin{cases} AB = MN \\ AC = MP \\ BC > NP \end{cases}$

خلف) اگر $\hat{A} > \hat{M}$ نباشد پس $\hat{A} < \hat{M}$ یا $\hat{A} = \hat{M}$ اگر $\hat{A} < \hat{M}$ طبق قضیه لولا $BC < NP$ که خلاف فرض است و اگر $\hat{A} = \hat{M}$ دو مثلث به حالت ض زض همنهشت می شوند ، بنا بر این $BC = NP$ که باز خلاف فرض است .





تمرین : ارتفاع های هر مثلث همرسند

از هر راس به موازات اضلاع آن رسم می کنیم

تا هم را در $A^{'}, B^{'}, C^{'}$ قطع کنند.

چون BCموازی $B^{'}C^{'}$ پس $AH \perp B^{'}C^{'}$ ، همچنین طبق

روش رسم $AC \parallel BC^{'}$, $BC \parallel AC^{'}$ پس $ACBC^{'}$ متوازی الاضلاع است پس $BC = AC^{'}$

به همین ترتیب $BC = AB^{'}$ بنابراین $AC^{'} = AB^{'}$ یعنی AH در مثلث $A^{'}B^{'}C^{'}$ نقش

عمود منصف رادارد (ارتفاعهای مثلث ABC عمودمنصفهای A' B' C' هستند) .

پیش از این ثابت شدعمود منصف ها همرسند بنابراین ارتفاعهای مثلث ABC نیز همرسند.

مساله ها :

۱- خطی به موازات آ ن خط و به فاصله ی مر کز توپ از آ ن .

۲- دایره ای است به مرکز دایره ی اصلی وشعاع مجموع شعاع های دو دایره ی مفروض .

۳- صفحه ای که ازمحل وسط پاره خط بر آن عمود رسم شود (به آن صفحه عمودمنصف پاره خط گوئیم).

٤- صفحه ای است موازی دو صفحه که از وسط فا صله ی بین دو صفحه می گذرد .

٥- کره ای به مرکز Pو شعاع dرا مشخص میکنیم(مکان هندسی اول) . صفحه ای به موازات دو صفحه ودر وسط فاصله بین آنها رسم می کنیم(مکان هندسی دوم) . تقاطع کره و صفحه در صورت وجود جواب مسا له است .

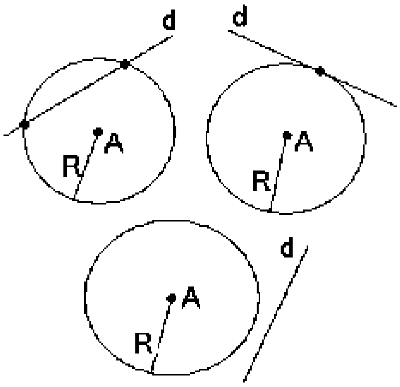
٦- استوانه ای است بایال های نامحدود ، محور استوانه خط مزبور و شعاع استوانه برابر d است.

۷- عمودی است که درآن نقطه بر خط مورد نظر رسم می شود.

۸- مربعی است که اضلاع آن موازی اضلاع مربع اصلی و به ضلع ٦ سانتی متر و با فا صله ی مساوی از اضلاع مربع اصلی می باشد.

۹- عمود منصف FSرارسم می کنیم (مکان هندسی اول). به موازات شهرداری و به فاصله ی ۹ متر از آن خطی رسم می کنیم (مکان هندسی دوم) . برخورد این دو مکان هندسی جواب مساله است .

۱- از A به شعاع R دایره ای رسم می کنیم (مکان هندسی اول) ودر صورت قطع با خط d (مکان هندسی دوم) ، محل تقاطع جواب مسا له است .



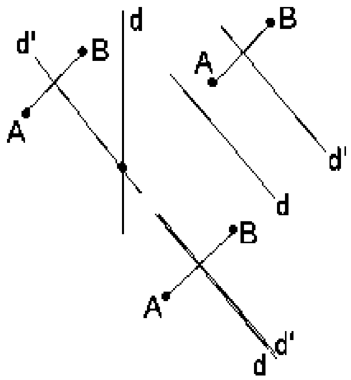
بحث بر تعداد جواب : فاصله ی نقطه تا خط $= L$

دایره خط را قطع و دو جواب دارد $L < R \Rightarrow$

مساله جواب ندارد $L > R \Rightarrow$

دایره بر خط مماس و یک جواب $L = R \Rightarrow$

۲- چون می خواهیم از A, B به یک فاصله باشد.،بایدعمودمنصف AB رارسم کنیم (مکان هندسی اول) و نیز می خواهیم نقطه بر خط d (مکان هندسی دوم) واقع باشد پس باید محل تقاطع خط d وعمود منصف AB را بیابیم .



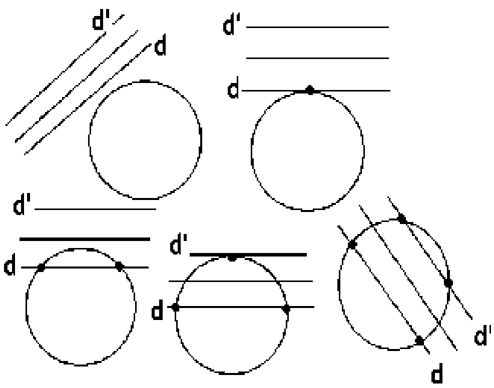
بحث بر تعداد جواب : عمود منصف AB را d' می نامیم.

اگر d' , d همدا در یک نقطه قطع کنند همان نقطه جواب است.

اگر d' , d دارای اشتراک نباشند ، مساله جواب ندارد.

اگر d' , d بر هم منطبق شوند ، تمام نقاط $d = d'$ جواب اند.

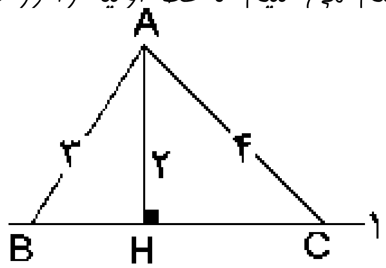
۳- مکان هندسی نقاطی که از خط Δ به فاصله l اند ، دو خط d' , d (مکان هندسی اول) به موازات آن وبه فاصله l از آنند و چون نقطه روی دایره C (مکان هندسی دوم) باشد ، پس قطع دایره با این دو خط را می یابیم.



بحث بر تعداد جواب : دو خط d' , d به موازات Δ وبه فاصله l از آن رسم می کنیم. بسته به طول l و موقعیت خطوط و دایره ۴ , ۳, ۲ , ۱ , ۰ جواب دارد .

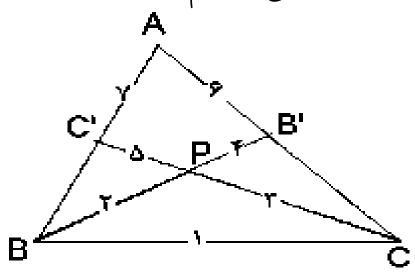
۴- برای کشف روش رسم فرض می کنیم مثلث ABC رسم شده است.مثلث های قائمه الزاویه ی ΔABH , ΔACH به حالت وتر و یک ضلع قائمه قابل رسم اند .

پس خطی رسم می کنیم ودرنقطه ی دلخواه H عمودی به طول h_a رسم کرده و انتهای دیگر عمود را A می نامیم . از A به شعاع های c , b کمانهایی رسم می کنیم تا خط اولیه را در C , B قطع کند، مثلث ABC جواب مساله است.

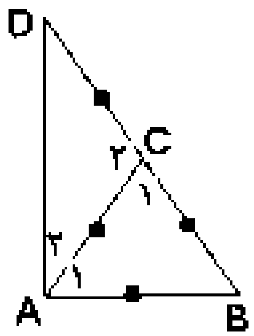


۵- برای کشف روش رسم فرض می کنیم مثلث ABCرسم شده است . مثلث PBCبه حالت سه ضلع قابل رسم است$\left(\frac{۲}{۳}m_b,\frac{۲}{۳}m_c,a\right)$.پاره خط PBرا از طرف P به اندازه ی نصف خودش تا B'امتداد می دهیم و PC را از P به اندازه ی نصف خودش تا C' امتداد می دهیم .

Cرابه B' , Bرا به C' وصل و امتداد می دهیم تا هم رادر A قطع کنند . ΔABCجواب مساله است .

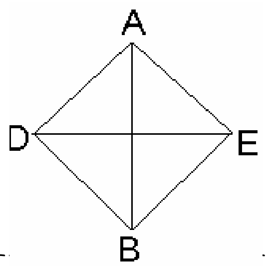


۶- چون از A,Bدو کمان مساوی زده است پس $AB = AC = BC$ یعنی مثلث ABC متساوی الا ضلاع است پس $\hat{C}_۱ = ۶۰$,$\hat{A}_۱ = ۶۰$پس $\hat{C}_۲ = ۱۲۰$ ولی Cرا به اندازه ی BC امتداد داده ایم پس ADC متساوی الساقین است بنا بر این $\hat{D} = \hat{A}_۲ = ۳۰^\circ$ در نتیجه $\hat{A} = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۶۰ + ۳۰ = ۹۰$.

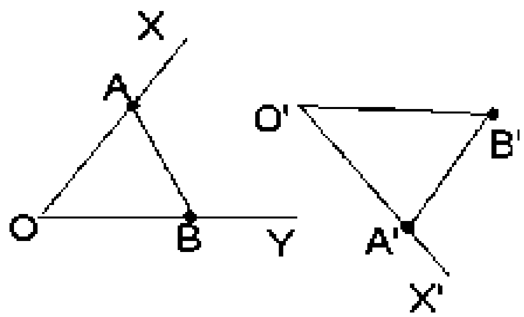


۷- روش رسم ابوالوفا حاکی است که $\begin{cases} BA = BC = AD \\ AC = BD \end{cases}$ و می دانیم اگر در یک چهار ضلعی اضلاع مقابل دو به دو برابر باشند چهارضلعی متوازی الاضلاع است پس $ACBD$ متوازی الاضلاع بوده و اضلاع BC , AD با هم موازیند.

۸- چون قطر های مربع عمود منصف هم هستند عمود منصف DEرا رسم و از محل قطع به اندازه نصف DEکمان میزنیم تا عمود منصف را در B , A قطع کند $AEBD$ جواب است .

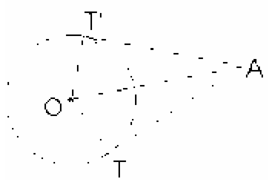


۹- از O کمانی رسم ی کنیم تا OY , OX را در B , A قطع کند. مثلث ABC را رسم می کنیم .
مثلث $O'A'B'$را به حالت (ض ض ض) ، همنهشت ΔOAB از O'رسم می کنیم .
چون دو مثلث همنهشت رسم شده اند پس $\hat{O}' = \hat{O}$.



تمرین ۱ $AT = AT' \Leftarrow \Delta OAT \cong \Delta OAT'$ وتر و یک ضلع $\Leftarrow$

$$\begin{cases} OT = OT' = r & \text{شعاع} \\ \hat{T} = \hat{T}' = ۹۰ & \text{مماس} \\ OA = OA & \text{مشترک} \end{cases}$$



تمرین ۲ الف) حالت ض ض ض $\Leftarrow$

$$\begin{cases} MT = MT' \\ OT = OT' \\ OM = OM \end{cases} , \quad MT = MT' \Leftarrow \text{طبق ق قبل}$$

$$\Delta OMT \cong \Delta OMT' \Rightarrow T\hat{M}O = T'\hat{M}O, T\hat{O}M = T'\hat{O}M$$

ب) $\begin{cases} OT = OT' \\ OH = OH \\ T\hat{O}H = T'\hat{O}H \end{cases} \Rightarrow$ (ض ز ض) $\Delta TOH \cong \Delta T'OH \Rightarrow \begin{cases} TH = T'H \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰ \end{cases}$

پ) $\begin{cases} T\hat{O}H = T\hat{O}M & \text{مشترک} \\ O\hat{H}T = O\hat{T}M = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow$ حالت دو زاویه

$$\Delta OTH \sim \Delta OTM \Rightarrow \frac{TH}{TM} = \frac{OT}{OM} = \frac{OH}{OT} \Rightarrow OH \times OM = OT^۲ = R^۲$$

تمرین ۳

الف) چون $T\hat{H}O = T\hat{H}M$ و $O\hat{T}H = T\hat{M}H$ پس به حالت دو زاویه

$$\Delta OTH \sim \Delta MTH \Rightarrow \frac{OT}{TM} = \frac{OH}{TH} = \frac{TH}{MH} \Rightarrow$$

$$TH^۲ = OH \times MH \quad , \quad TH = \frac{۱}{۲}TT' \Rightarrow TT'^۲ = ۴OH \times MH$$

ب) چون $T\hat{O}H = T\hat{O}M$, $T\hat{H}O = O\hat{T}M$ پس به حالت دو زاویه

$$\Delta OTH \sim \Delta OTM \Rightarrow \frac{TH}{TM} = \frac{OT}{OM} \Rightarrow OT \times TM = OM \times TH \Rightarrow R \times MT = OM \times \frac{۱}{۲}TT'$$

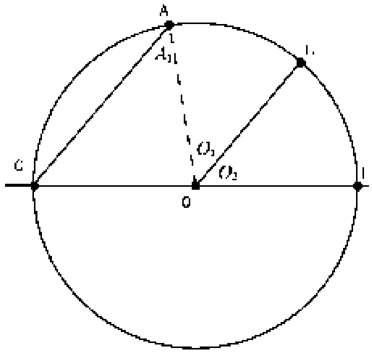
۱- الف) $y=۱۴۰, x+y+۸۴=۳۶۰ \Rightarrow x+۱۴۰+۸۴=۳۶ \Rightarrow x=۳۶۰-۲۲۴=۱۳۶$

ب) $x=۱۶۵\ ,\ x+y+۸۴=۳۶۰ \Rightarrow ۱۶۵+y+۸۴=۳۶۰ \Rightarrow y=۱۱۱ \Rightarrow \widehat{y}=۱۱۱$

۲- الف) $AP^۲+PR^۲=AR^۲ \Rightarrow AP^۲+۶^۲=۱۰^۲ \Rightarrow AP^۲=۶۴ \Rightarrow AP=۸, AB=۲AP=۱۶$

ب) $CQ^۲+QR^۲=CR^۲ \Rightarrow \left(\sqrt{۲}\right)^۲=CQ^۲+CQ^۲ \Rightarrow ۲CQ^۲=۲ \Rightarrow CQ=۱, DQ=۱, CD=۲$

۳-



$CA \parallel ON \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{O}_۱, \hat{A}_۱=\hat{C}, \hat{C}=\hat{O}_۲ \Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲$

زاویه مرکزی $\Rightarrow \widehat{AN}=\widehat{NI}$

۴- اگر دو وتر مساوی باشند کمانهای نظیر آنها برابرند و بر عکس پس ،

الف) $AD=BC \Rightarrow \widehat{AD}=\widehat{BC} \Rightarrow \widehat{AD}+\widehat{AB}=\widehat{BC}+\widehat{AB} \Rightarrow \widehat{DAB}=\widehat{CBA} \Rightarrow DB=AC$

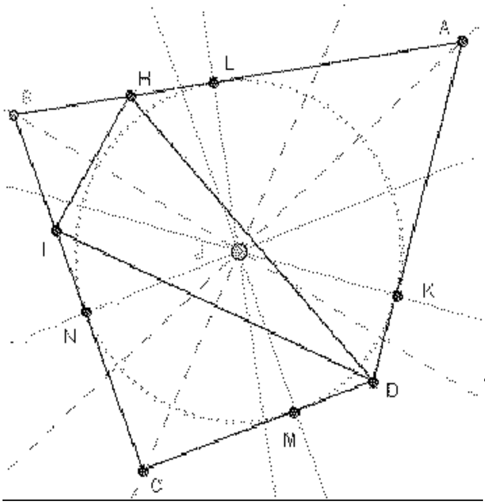
ب) $AC=BD \Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{BD} \Rightarrow \widehat{AC}-\widehat{AB}=\widehat{BD}-\widehat{AB} \Rightarrow \widehat{BC}=\widehat{AD} \Rightarrow BC=AD$

۵- اگر از نقطه ای دو مماس بر دایره ای رسم شود طول آنها برابراست پس ،

$$P_{ABCD}=AB+BC+CD+DA=۲BQ+۲CQ+۲SD+۲AS$$
$$=۲(۵+۴+۶+۷)=۴۴$$

۶- اگر از نقطه ای دو مماس بر دایره ای رسم شود طول آنها برابراست پس ،

$$GQ=GP\ ,\ OQ=OR\ ,\ LR=LS\ ,\ YS=YP$$
$$\Rightarrow GO+LY=GQ+QO+LS+SY=GP+OR+LR+YP$$
$$=(GP+YP)+(OR+LR)=GY+OL$$



۷- نقاط I , H را چنان انتخاب که $AH = AD$, $CD = CI$

$AB + CD = AD + BC$

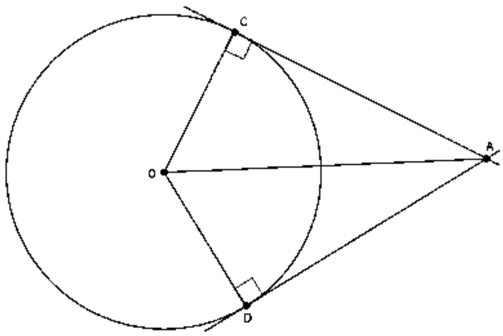
$\Rightarrow AH + HB + CD = AD + BI + IC \Rightarrow HB = BI$

پس مثلث HBI هم متساوی الساقین است و در مثلث متساوی الساقین عمود منصف و نیمساز بر هم منطبقند.

اگر عمودمنصفهای ΔIHD را رسم کنیم همرا در J قطع میکنند.

این عمود منصفها نقش عمود منصف (نیمساز) سه مثلث متساوی الساقین ΔCID , ΔBHI , ΔAHD رادارند.

بنابر خاصیت مکان هندسی نیمساز $JL = JK = JM = JN$ یعنی اگر دایره ای به مرکز J و شعاع JL رسم کنیم از نقاط K,M,N هم گذشته ودر آن نقاط بر اضلاع متناظر مماس است.



۸- چون OA نیمساز $\widehat{CAD}$ است پس $\widehat{OAC} = ۳۰°$ و در مثلث قائمه الزاویه ضلع روبرو به زاویه $۳۰°$ نصف وتر است پس $OA = ۲ \times OC = ۱۰$.

۹-

الف) $MT^۲ + OT^۲ = OM^۲ \Rightarrow MT^۲ + ۶^۲ = ۱۲^۲ \Rightarrow MT^۲ = ۱۴۴ - ۳۶ = ۱۰۸ \Rightarrow MT = ۶\sqrt{۳}$

ب) $TT'.OM = ۲R.MT \Rightarrow TT' \times ۱۲ = ۲(۶) \times ۶\sqrt{۳} \Rightarrow TT' = ۶\sqrt{۳}$

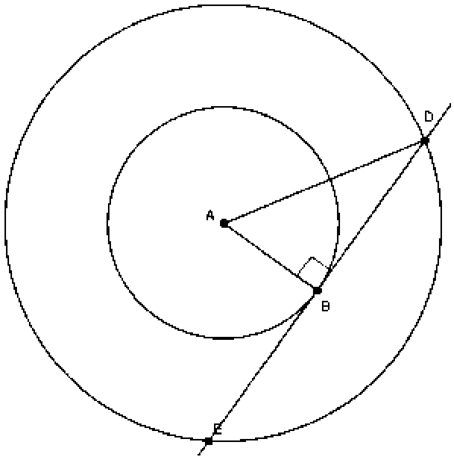
پ) با توجه به قسمت قبل $MT = MT' = TT' = ۶\sqrt{۳} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{T} = \widehat{T}' = ۶۰°$

---

۱۰ -

$$BD = BE\ ,\ CD = CF\ ,\ AE = AF$$
$$\Rightarrow P_{ABC} = AB + AC + BC = AB + AC + BD + DC$$
$$= AB + AC + BE + CF = (AB + BE) + (AC + CF)$$
$$= AE + AF = AE + AE = ۲AE$$

۱۱ -



$$BD^۲ + AB^۲ = AD^۲$$
$$\Rightarrow BD^۲ + ۳^۲ = ۵^۲ \Rightarrow BD^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶$$
$$\Rightarrow BD = ۴ \Rightarrow DE = ۲BD = ۸$$

۱- شکل چپ $۲x+۳x+۴x=۳۶۰ \Rightarrow ۹x=۳۶۰ \Rightarrow x=۴۰$

زاویه محاطی; $y=\frac{۴x}{۲}=۲x \Rightarrow y=۲(۴۰)=۸۰$

شکل راست $۲x+۱۲۰+۱۰۰=۳۶۰ \Rightarrow ۲x=۱۴۰ \Rightarrow x=۷۰$

۲- الف) $\hat{N}=\frac{A\overset{\frown}{G}}{۲}=\frac{۷۰}{۲}=۳۵$ ب) $\hat{R}=\hat{N}=۳۵°$ پ) $N\overset{\frown}{R}=۲\times N\hat{A}R=۲(۳۰)=۶۰$

ت) $G\overset{\frown}{N}=۱۸۰-N\overset{\frown}{R}=۱۸۰-۶۰=۱۲۰$ ث) $G\hat{A}N=\frac{G\overset{\frown}{N}}{۲}=۶۰$ ج) $G\hat{A}R=\frac{G\overset{\frown}{N}R}{۲}=\frac{۱۸۰}{۲}=۹۰$

۳- $RS \| VT$, TR قطر , $T\overset{\frown}{S}=۷۰ \Rightarrow T\overset{\frown}{S}=R\overset{\frown}{V}=۷۰$, $S\overset{\frown}{R}=T\overset{\frown}{V}=۱۱۰$

$\hat{۱}=T\overset{\frown}{S}=۷۰$, $\hat{۲}=\frac{T\overset{\frown}{S}}{۲}=\frac{۷۰}{۲}=۳۵$, $\hat{۳}=R\overset{\frown}{S}=۱۱۰$, $\hat{۴}=\hat{۲}=۳۵$

$\hat{۵}=\frac{R\overset{\frown}{S}}{۲}=\frac{۱۱۰}{۲}=۵۵$, $\hat{۶}=\hat{۵}=۵۵$, $\hat{۷}=\frac{۱۸۰}{۲}=۹۰$, $\hat{۸}=\hat{۲}=۳۵$

۴-

$B\overset{\frown}{C}+A\overset{\frown}{C}+A\overset{\frown}{B}=۳۶۰ \Rightarrow B\overset{\frown}{C}+۹۰+۱۳۰=۳۶۰ \Rightarrow B\overset{\frown}{C}=۱۴۰$, $B\hat{A}C=\frac{B\overset{\frown}{C}}{۲}=۷۰$

۵-

$A\hat{O}C=A\overset{\frown}{C}$, $A\hat{B}C=\frac{A\overset{\frown}{C}}{۲} \Rightarrow A\hat{O}C=۲A\hat{B}C \Rightarrow ۳\alpha+۱۲=۲\alpha+۳۲ \Rightarrow \alpha=۲۰$

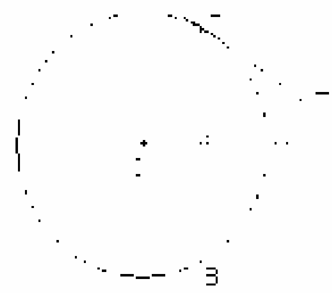
$\Rightarrow A\hat{O}C=۳\alpha+۱۲=۶۰+۱۲=۷۲$, $A\hat{B}C=\alpha+۱۶=۲۰+۱۶=۳۶$

۶-

$AB=AC \Rightarrow A\overset{\frown}{B}=A\overset{\frown}{C}=۱۴۰$, $A\overset{\frown}{B}+A\overset{\frown}{C}+B\overset{\frown}{C}=۳۶۰$

$\Rightarrow ۲۸۰+B\overset{\frown}{C}=۳۶۰ \Rightarrow B\overset{\frown}{C}=۸۰$

زاویه ظلی; $B\hat{C}T=\frac{B\overset{\frown}{C}}{۲}=\frac{۸۰}{۲}=۴۰$



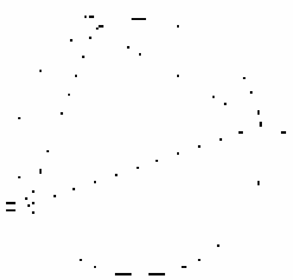
۷- مرکزی $\begin{cases} T\hat{A}B + B\hat{A}O = ۹۰ \\ B\hat{A}O + A\hat{O}M = ۹۰ \end{cases} \Rightarrow T\hat{A}B = M\hat{O}A$ ①

قطر عمود بر وتر کمانهای آن را نصف می کند ② $M\hat{O}A = A\widehat{M} = \frac{A\widehat{B}}{۲}$

$\Rightarrow \widehat{TAB} = \frac{\widehat{AB}}{۲}$

۸- $TA \parallel BB' \Rightarrow T\hat{A}B = A\hat{B}B'$, محاطی $A\hat{B}B' = \frac{A\widehat{B}'}{۲}$

$TA \parallel BB' \Rightarrow$ قضایای قبل $A\widehat{B}' = A\widehat{B}$ $\Rightarrow T\hat{A}B = \frac{A\widehat{B}}{۲}$

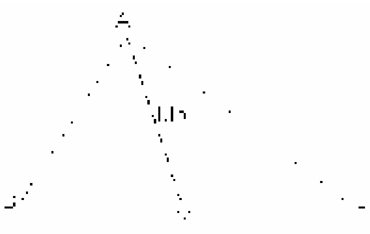


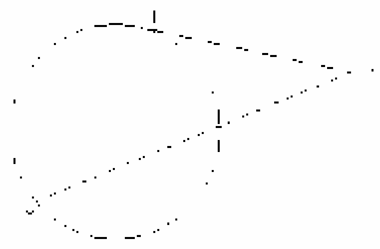
۹- هر مثلث قابل محاط شدن در دایره است.

محاطی $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{B\widehat{C}}{۲} + \frac{A\widehat{C}}{۲} + \frac{A\widehat{B}}{۲} = \frac{B\widehat{C} + A\widehat{C} + A\widehat{B}}{۲} = \frac{۳۶۰}{۲} = ۱۸۰$

۱۰- پاره خط BCبه ضلع a قابل رسم است (C,B) چون $\hat{A} = \alpha$ بنابر این A روی کمان درخور زاویه αروبرو به BCاست و چون $AM = m_a$ فاصله ی نقطه ی A از وسط $(M)BC$ برابر m_a است که مکان آن دایره ای به مرکز Mو شعاع m_a است.

نقطه ی A محل برخورد این دو مکان است (کمان درخور زاویه)(A)

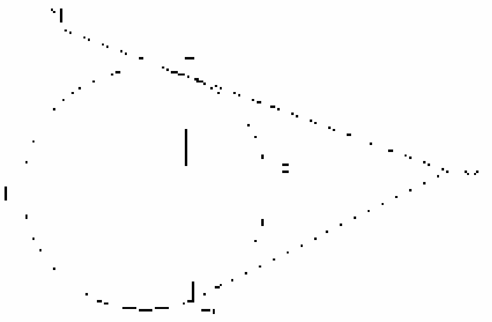




تمرین ۱ T را به A' وصل می کنیم.

$$T\hat{A}'A = A'\hat{T}M + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = T\hat{A}'A - A'\hat{T}M$$

$T\hat{A}'A \ , A\hat{T}M$ ظلـی $\Rightarrow \hat{M} = \frac{A\widehat{T}}{۲} - \frac{A'\widehat{T}}{۲} \Rightarrow \hat{M} = \frac{A\widehat{T} - A'\widehat{T}}{۲}$



تمرین ۲ T را به T' وصل می کنیم.

خارجی $N\hat{T}T' = T\hat{T}'M + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = N\hat{T}T' - T\hat{T}'M$

ظلی $N\hat{T}T' \ , T\hat{T}'M$ ظلی $\Rightarrow \hat{M} = \frac{T\hat{E}T'}{۲} - \frac{T\hat{F}T'}{۲}$

۱-

$$\hat{M}=\frac{A\overset{\frown}{C}+B\overset{\frown}{D}}{۲}\Rightarrow ۹۰=\frac{۲x+۳x+۱۰}{۲}$$

$$\Rightarrow ۵x+۱۰=۱۸۰\Rightarrow ۵x=۱۷۰\Rightarrow x=۳۴$$

$$A\overset{\frown}{C}=B\overset{\frown}{D}\Rightarrow y=۲x=۲(۳۴)=۶۸\Rightarrow y=۶۸$$

۲-

الف)

$$۱)\ \hat{M}=\frac{A\overset{\frown}{B}+A'\overset{\frown}{B'}}{۲}\Rightarrow \hat{M}=\frac{۹۰+۶۰}{۲}=\frac{۱۵۰}{۲}=۷۵ \qquad ۲)\ \hat{M}=\frac{A\overset{\frown}{B}+A'\overset{\frown}{B'}}{۲}=\frac{۷۵+۷۵}{۲}=۷۵$$

$$۳)\ \hat{M}=\frac{A\overset{\frown}{B}+A'\overset{\frown}{B'}}{۲}=\frac{۲۵۰}{۲}=۱۲۵ \qquad ۴)\ \hat{M}=\frac{A\overset{\frown}{B}+A'\overset{\frown}{B'}}{۲}=\frac{۳۶۰-۱۷۰}{۲}=\frac{۱۹۰}{۲}=۹۵$$

ب)

$$۱)\ \hat{M}=\frac{A\overset{\frown}{B}+A'\overset{\frown}{B'}}{۲}\Rightarrow ۸۵=\frac{A\overset{\frown}{B}+A'\overset{\frown}{B'}}{۲}\Rightarrow A\overset{\frown}{B}+A'\overset{\frown}{B'}=۱۷۰$$

$$۲)\ \hat{M}=\frac{A\overset{\frown}{B}+A'\overset{\frown}{B'}}{۲}\Rightarrow ۴۸=\frac{A\overset{\frown}{B}+A'\overset{\frown}{B'}}{۲}\Rightarrow A\overset{\frown}{B}+A'\overset{\frown}{B'}=۹۶\Rightarrow A\overset{\frown}{B'}+A'\overset{\frown}{B}=۳۶۰-۹۶=۲۶۴$$

$$۳)\ \hat{M}=\frac{۳۶۰-A'\overset{\frown}{B}-A\overset{\frown}{B'}}{۲}\Rightarrow ۶۰=\frac{۳۶۰-A'\overset{\frown}{B}-۱۶۰}{۲}\Rightarrow ۱۲۰=۲۰۰-A'\overset{\frown}{B}\Rightarrow A'\overset{\frown}{B}=۱۸۰$$

$$۴)\ A\hat{M}B'=\frac{A\overset{\frown}{B'}+A'\overset{\frown}{B}}{۲}=\frac{۲A\overset{\frown}{B'}}{۲}=A\overset{\frown}{B'}=۷۰$$

۳-

$$\text{الف)}\ \hat{M}=\frac{A\overset{\frown}{B}-A'\overset{\frown}{B'}}{۲}\Rightarrow ۲۰=\frac{۱۶۰-A'\overset{\frown}{B'}}{۲}\Rightarrow A'\overset{\frown}{B'}=۱۶۰-۴۰=۱۲۰$$

$$\text{ب)}\ \hat{M}=\frac{A\overset{\frown}{B}-A'\overset{\frown}{B'}}{۲}\Rightarrow ۳۵=\frac{A\overset{\frown}{B}-۶۰}{۲}\Rightarrow A\overset{\frown}{B}=۷۰+۶۰=۱۳۰$$

$$\text{پ)}\ \hat{M}=\frac{A\overset{\frown}{B}-A'\overset{\frown}{B'}}{۲}\Rightarrow ۴۵=\frac{A\overset{\frown}{B}-A'\overset{\frown}{B'}}{۲}\Rightarrow A\overset{\frown}{B}-A'\overset{\frown}{B'}=۹۰$$

$$\text{ت)}\ \hat{M}=\frac{A\overset{\frown}{B}-A'\overset{\frown}{B'}}{۲}\Rightarrow ۲۵=\frac{۳A'\overset{\frown}{B'}-A'\overset{\frown}{B'}}{۲}=\frac{۲A'\overset{\frown}{B'}}{۲}=A'\overset{\frown}{B'}\Rightarrow A'\overset{\frown}{B'}=۲۵$$

۴- الف)

۱) $a=۶۰$, $c=۱۵۰$, $\hat{M}=\frac{c-a}{۲}=\frac{۱۵۰-۶۰}{۲}=\frac{۹۰}{۲}=۴۵$

۲) $b=۱۲۰, c=۲۰۰, b+c+a=۳۶۰ \Rightarrow a=۴۰$, $\hat{M}=\frac{c-a}{۲}=\frac{۲۰۰-۴۰}{۲}=\frac{۱۶۰}{۲}=۸۰$

۳) $c-a=۷۴$, $\hat{M}=\frac{c-a}{۲}=\frac{۷۴}{۲}=۳۷$

۴) $a=\frac{b}{۴}=\frac{c}{۷}$, $\hat{M}=\frac{c-a}{۲}$, $a+b+c=۳۶۰ \Rightarrow a+۴a+۷a=۳۶۰$

$\Rightarrow ۱۲a=۳۶۰ \Rightarrow a=۳۰$, $c=۷a=۲۱۰$, $\hat{M}=\frac{c-a}{۲}=\frac{۲۱۰-۳۰}{۲}=\frac{۱۸۰}{۲}=۹۰$

ب)

۱) $c=۲۰۰$, $\hat{M}=۴۵$, $\hat{M}=\frac{c-a}{۲} \Rightarrow ۴۵=\frac{۲۰۰-a}{۲} \Rightarrow a=۲۰۰-۹۰=۱۱۰$

۲) $a=۵۵$, $\hat{M}=۳۰$, $\hat{M}=\frac{c-a}{۲} \Rightarrow ۳۰=\frac{c-۵۵}{۲} \Rightarrow c=۶۰+۵۵=۱۱۵$

۳) $c=۳a$, $\hat{M}=۴۵$, $\hat{M}=\frac{c-a}{۲} \Rightarrow ۴۵=\frac{۳a-a}{۲} \Rightarrow a=۴۵$

۴) $b=۱۰۰$, $a+b+c=۳۶۰ \Rightarrow a+c=۲۶۰$, $\hat{M}=\frac{a-c}{۲} \Rightarrow ۶۰=\frac{a-c}{۲}$

$$\Rightarrow a-c=۱۲۰ \Rightarrow \begin{cases} a+c=۲۶۰ \\ a-c=۱۲۰ \end{cases} \Rightarrow ۲a=۳۸۰ \Rightarrow a=۱۹۰ \quad (c=۷۰)$$

۵-

$$B\hat{N}T=\frac{B\widehat{T}+A\hat{L}}{۲} \Rightarrow ۶x+۲۸=\frac{۹x+۱۷+۱۰x-۱۰}{۲} \Rightarrow ۱۲x+۵۶=۱۹x+۷$$

$$\Rightarrow ۷x=۴۹ \Rightarrow x=۷ \quad , \quad B\hat{N}T=۶x+۲۸=۴۲+۲۸=۷۰$$

۶- الف)

$$\begin{cases} ۸۰=\frac{x+y}{۲} \\ ۲۰=\frac{x-y}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=۱۶۰ \\ x-y=۴۰ \end{cases} \Rightarrow ۲x=۲۰۰ \Rightarrow x=۱۰۰ \ , \ y=۱۶۰-۱۰۰=۶۰$$

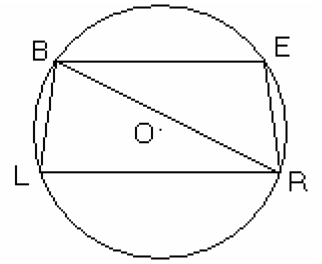
ب) $\begin{cases} x+y=۳۶۰ \\ ۶۲=\dfrac{x-y}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=۳۶۰ \\ x-y=۱۲۴ \end{cases} \Rightarrow ۲x=۴۸۴ \Rightarrow x=۲۴۲ \Rightarrow y=۳۶۰-۲۴۲=۱۱۸$

۷- متساوی الساقین $\Delta DMI \Leftarrow$ $\hat{M}=\hat{I} \Leftarrow$ $\begin{cases} \hat{M}=\hat{N}=\dfrac{A\overset{\frown}{D}}{۲} & \text{زاویه محاطی} \\ \hat{N}=\hat{I} & \text{دو زاویه مقابل متوازی الاضلاع} \end{cases}$

پس $\mathrm{DM}=\mathrm{DI}$.

۸- $BL=ER \Rightarrow B\overset{\frown}{L}=E\overset{\frown}{R} \Rightarrow \dfrac{B\overset{\frown}{L}}{۲}=\dfrac{E\overset{\frown}{R}}{۲}$

$\Rightarrow B\hat{R}L=E\hat{B}R \Rightarrow BE \parallel LR$ (عکس ق خطوط موازی)

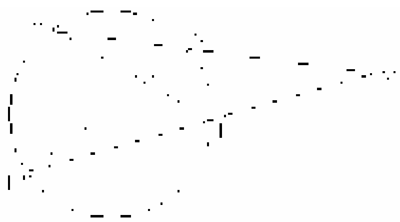


۹-

متساوی الساقین $\Delta ADC \Leftarrow \hat{C}=D\hat{A}C \Leftarrow$ $\begin{cases} \hat{B}=D\hat{A}C=\dfrac{A\overset{\frown}{D}}{۲} \\ AB=AC \Rightarrow \hat{B}=\hat{C} \end{cases}$

تمارین پراکنده (صفحه ۷٦)

تمرین صفحه ی ۷٦ A را به 'B و B را به 'A وصل می کنیم



$$\begin{cases}\hat{M}=\hat{M}\\ \hat{A}'=\hat{B}'=\dfrac{A\widehat{B}}{۲}\end{cases}\Rightarrow$$ حالت دو زاویه مساوی $\Delta MA'B \sim \Delta MAB'$

$$\Rightarrow \frac{AB'}{A'B}=\frac{MA}{MB}=\frac{MB'}{MA'} \Rightarrow MA\times MA'=MB\times MB'$$

تمرین صفحه ی ۷۷ (عکس قضیه)

اثبات) از 'A , A , T دایره ای می گذرد در سمت دیگر مماسی بر دایره

از M رسم می کنیم (مماس 'MT) از T , 'T به O وصل می کنیم.

فرض $\quad MT^{۲}=MA\cdot MA'$

قضیه اصلی $\quad MT'^{۲}=MA\cdot MA'$

$$\begin{cases}MT^{۲}=MA\cdot MA'\\ MT'^{۲}=MA\cdot MA'\end{cases}\Rightarrow MT=MT'$$

$$\Rightarrow\begin{cases}MT=MT'\\ OT=OT'=R\\ OM=OM\end{cases}\Rightarrow \text{(ض ض ض)}\ \Delta OMT\cong\Delta OMT'$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\hat{T}'=\hat{T}\\ \hat{T}'=۹۰\end{cases}\Rightarrow \hat{T}=۹۰$$

۱- الف) $x(x-۲)=۴\times۱۲\Rightarrow x^{۲}-۲x-۴۸=۰\Rightarrow(x-۸)(x+۶)=۰\Rightarrow x=۸$

ب) $۴x=۲\times۱۰\Rightarrow ۴x=۲۰\Rightarrow x=۵\ ,\ y(y+x+۴)=۶^{۲}\Rightarrow y(y+۹)=۳۶$

$\Rightarrow y^{۲}+۹y-۳۶=۰\Rightarrow(y+۱۲)(y-۳)=۰\Rightarrow y=۳$

۲- $ID\times IE=IS\times IN\ ,\ IE=IN\Rightarrow ID=IS$

۳- الف) $\begin{cases}C\hat{A}D=B\hat{A}D\\ \hat{E}=\hat{C}=\frac{A\overset{\frown}{B}}{۲}\end{cases}\Rightarrow$ دو زاویه مساوی $\Delta ADC\sim\Delta ABE\Rightarrow\frac{DC}{BE}=\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AE}$

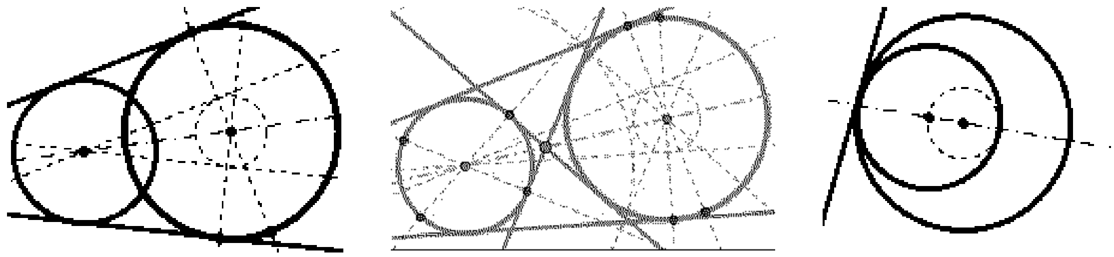
ب) $\Rightarrow AB\times AC=AD\times AE$

$(ب)\Rightarrow AB\times AC=AD(AD+DE)=AD^{۲}+AD\times DE$

پ) $\Rightarrow AD\times DE=BD\times DC\Rightarrow AB\times AC=AD^{۲}+BD\times DC$

$\Rightarrow AD^{۲}=AB\times AC-BD\times DC$

-۱

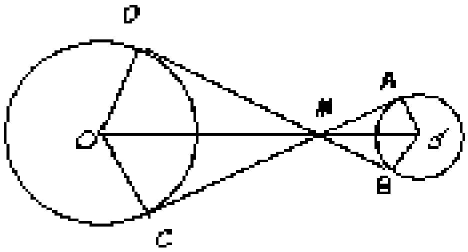


-۲

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}} = \sqrt{(R + R')^{۲} - (R - R')^{۲}}$$
$$= \sqrt{۴RR'} = ۲\sqrt{RR'} = ۲\sqrt{۴ \times ۹} = ۱۲$$

-۳

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}} \Rightarrow ۵a - ۳ = \sqrt{۱۳^{۲} - (۸ - ۳)^{۲}} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$
$$\Rightarrow ۵a = ۱۵ \Rightarrow a = ۳$$



-٤ مماسهای داخلی AC و BD همدیگر را در M قطع می کنند .
M را به O,O' وصل می کنیم باید ثابت کنیم
MO',MO نیم صفحه تشکیل می دهند. (هم خط اند)

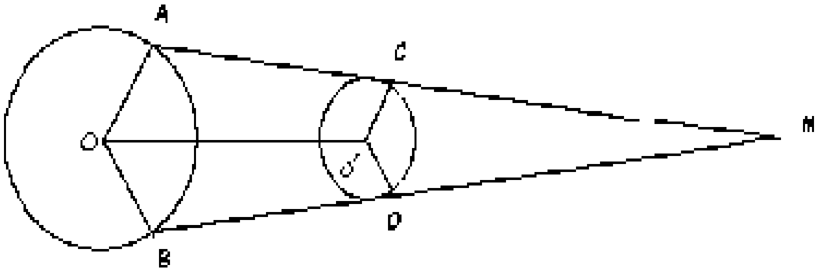
$$\begin{cases} OD = OC \\ MD = MC \Rightarrow \text{ض ض ض} \quad \Delta OMD \cong \Delta OMC \Rightarrow D\hat{M}O = C\hat{M}O = \alpha \\ O'A = O'B \end{cases}$$

$$\begin{cases} MA = MB \\ O'M = O'M \Rightarrow \text{ض ض ض} \quad \Delta O'AM \cong O'BM \Rightarrow A\hat{M}O' = B\hat{M}O' = \beta \\ O'A = O'B \end{cases}$$

متقابل به راس $D\hat{M}C = B\hat{M}A \quad \Rightarrow ۲\alpha = ۲\beta \Rightarrow \alpha = \beta$

پس $A\hat{M}O',O\hat{M}C$ مساویند ولی در راس M مشترک و یک ضلع آنها CM , MA مشترک اند.
طبق عکس قضیه زوایای متقابل به راس ، دو ضلع دیگر آنها هم (یعنی $O'M ,OM$)
هم امتداد اندپس $O\hat{M}O' = ۱۸۰$.
یعنی $O\hat{M}O'$ همان خط المرکزین است بنابر این مماسهای AC , DB و خط المرکزین OO'
در M تلاقی می کنند .

۵- oo'را به M وصل می کنیم (صرف نظر از اینکه هم خط اند)



$$\begin{cases} OA = OB \\ OM = OM \Rightarrow \\ MA = MB \end{cases}$$ ض ض ض $\Delta OAM \cong \Delta OBM \Rightarrow A\hat{M}B$ نیمساز OM

$$\begin{cases} O'C = O'D \\ O'M = O'M \Rightarrow \\ MC = MD \end{cases}$$ ض ض ض $\Delta O'CM \cong \Delta O'DM \Rightarrow A\hat{M}B$ نیمساز $O'M$

و چون نیمساز $A\hat{M}B$ یکتاست بنابراین $OM, O'M$ برهم منطبق اند یعنی O, M, O'هم خط اند.

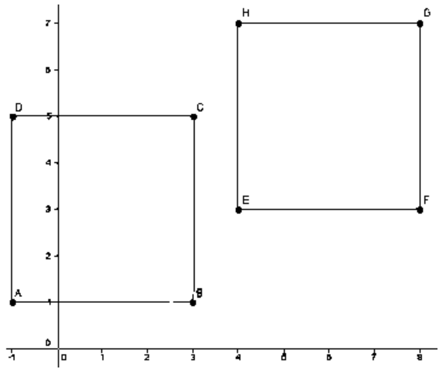
پس خط المرکزین OO' و مماسهای خارجی MB, MA در M به هم برخورد می کنند.

۱- ب) $D(۵,۲)=(-۵,۲)$ الف) $T(۵,۲)=(۵+۳,۲-۲)=(۸,۰)$

ت) $K(۵,۲)=(۳(۵)-۴,۵(۲)+۱)=(۱۱,۱۱)$ پ) $D(۵,۲)=(۲(۵),۲)=(۱۰,۲)$

۲- الف)

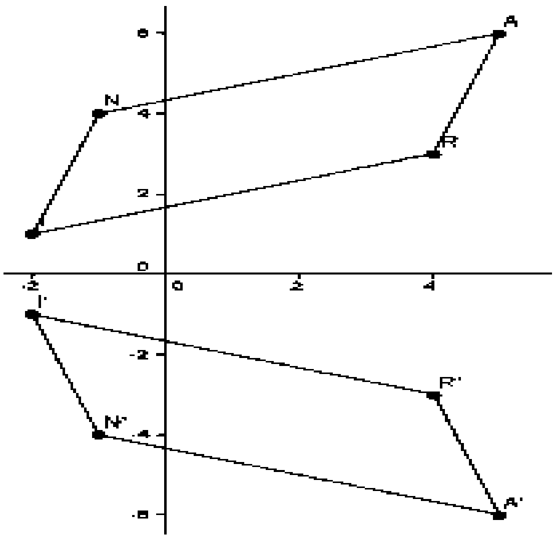
$$Y' = T(Y)=T(-۱,۱)=(-۱+۵,۱+۲)=(۴,۳)$$
$$A'=T(A)=T(۳,۱)=(۳+۵,۱+۲)=(۸,۳)$$
$$Z'=T(Z)=T(۳,۵)=(۳+۵,۵+۲)=(۸,۷)$$
$$D'=T(D)=T(-۱,۵)=(-۱+۵,۵+۲)=(۴,۷)$$



پ) مربع ۵ واحد به راست و ۲ واحد به بالا انتقال یافته اند

۳- الف،ب)

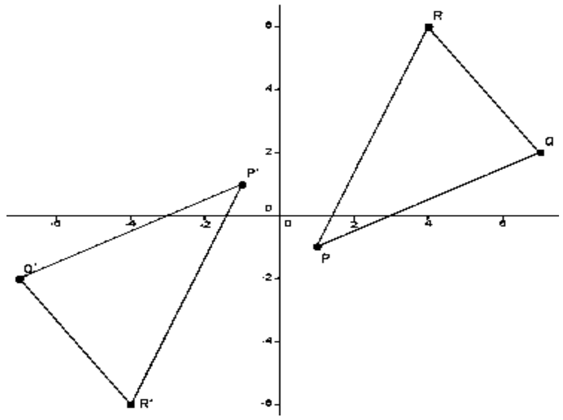
$$I' = D(I)=D(-۲,۱)=(-۲,-۱)$$
$$R'=D(R)=D(۴,۳)=(۴,-۳)$$
$$A'=D(A)=D(۵,۶)=(۵,-۶)$$
$$N'=D(N)=D(-۱,۴)=(-۱,-۴)$$



پ) تقارن نسبت به محور x ها.

٤- الف،ب)

$$P'=D(P)=D(۱,-۱)=(-۱,۱)$$
$$Q'=D(Q)=D(۷,۲)=(-۷,-۲)$$
$$R'=D(R)=D(۴,۶)=(-۴,-۶)$$



پ) تقارن نسبت به مبدأ مختصات.

۵- الف) $(۰,۶)=(x,-y+۱۲)\Rightarrow x=۰\ ,-y+۱۲=۶\Rightarrow y=۶\Rightarrow A=(۰,۶)$

ب) $(۰,۶)=(۲x,y-۱)\Rightarrow ۲x=۰\Rightarrow x=۰\ ,y-۱=۶\Rightarrow y=۷\Rightarrow B=(۰,۷)$

پ) $(۰,۶)=(y,-x)\Rightarrow y=۰\ ,-x=۶\Rightarrow x=-۶\Rightarrow C=(-۶,۰)$

۶- الف) $A'=(-۴,۰)\ ,\ B'=(-۲,۲)\ ,\ C'=(۲,-۱)\ ,\ D'=(-۳,-۴)\ ,\ E'=(-۴,-۶)$

ب)

$E'=(۳,۶)=(x,y-۲)\Rightarrow E=(۳,۸)\ ,\ F'=(-۲,-۶)=(x,y-۲)\Rightarrow F=(-۲,-۴)$

$G'=(۰,۰)=(x,y-۲)\Rightarrow G=(۰,۲)\ ,\ H'=(۴,-۱)=(x,y-۲)\Rightarrow H=(۴,۱)$

$I'=(-۳,۵)=(x,y-۲)\Rightarrow I=(-۳,۷)$

پ) بلی، اگر دو نقطه دلخواه

$$A=(x_۱,y_۱),\ B=(x_۲,y_۲)\Rightarrow A'=(x_۱,y_۱-۲)\ ,\ B'=(x_۲,y_۲-۲)$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

$$,A'B'=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-۲-y_۱+۲)^۲}=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

$$\Rightarrow AB=A'B'$$

ت) مشابه قسمتهای قبل قابل حل است.

۷-

الف) به ازای هرنقطه برنیمدایره تنها یک نقطه برمحور x ها نظیر آن وجود دارد پس نگاشت است.

ب) به ازای هر نقطه بر محور xهاحداکثر یک نقطه بر نیمدایره ونظیرآن وجود دارد پس ۱-۱ است.

پ) تصویر $(۰,۱)$نقطه $(۰,۰)$ و تصویر $(-۱,۰)$ همان نقطه $(-۱,۰)$ و تصویر (x,y) نقطه $(x,۰)$ است.

$$A'=\left(\frac{۱}{۲},۰\right)\Rightarrow x=\frac{۱}{۲},x^{۲}+y^{۲}=۱\Rightarrow y^{۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow y=+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow A=\left(\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

ت) $$B'=\left(\frac{-۱}{۴},۰\right)\Rightarrow x=-\frac{۱}{۴},x^{۲}+y^{۲}=۱\Rightarrow y^{۲}=\frac{۱۵}{۱۶}\Rightarrow y=\frac{+\sqrt{۱۵}}{۴}\Rightarrow B=\left(-\frac{۱}{۴},\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}\right)$$

$$C'=(x,۰)\ ,x^{۲}+y^{۲}=۱\Rightarrow y^{۲}=۱-x^{۲}\Rightarrow y=+\sqrt{۱-x^{۲}}\Rightarrow C=\left(x,\sqrt{۱-x^{۲}}\right)$$

۸- الف) خیر ، زیرا هر دو نقطه واقع بر خط عمود تصویر یکسان دارند که همان پای عمود است.

ب) خیر ، زیرا اگر دو نقطه دلخواه واقع بر عمودی بر 1 در نظر بگیریم ، فاصله تصویر این دو نقطه صفر است درحالیکه فاصله بین دو نقطه لزوما صفر نیست. پس طول را حفظ نمی کند.

۱- از بالا به پایین محل های خالی $۱-(x,y)\to(x+۴,y-۱)$ $۲-(۴+۵,-۳+۱)=(۹,-۲)$

$۳-(x,y)\to(x+۵,y-۲)$ $۴-(-۳,۲)$ $۵-(x,y)\to(x-۳,y+۳)$

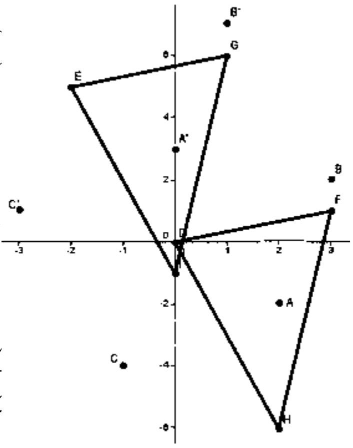
۲- b,d, f

۳- سمت راست) انتقال چهار رأس متوازی الاضلاع یک واحد به چپ و دو واحد پائین

وسط) انتقال سه رأس مثلث یک واحد بالا و دو واحد به راست

سمت چپ) انتقال چهار رأس مربع سه واحد به راست

۴- الف) $T(۰,۰)=(-۲,۵)$, $T(۳,۱)=(۱,۶)$, $T(۲,-۶)=(۰,-۱$



ب) $x-۲=۰, y+۵=۳\Rightarrow x=۲, y=-۲\Rightarrow A=(۲,-۲)$

$x-۲=۱, y+۵=۷\Rightarrow x=۳, y=۲\Rightarrow B=(۳,۲)$

$x-۲=-۳, y+۵=۱\Rightarrow x=-۱, y=-۴\Rightarrow C=(-۱,-۴$

ت) $AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲(y_۲-y_۱)^۲}$, $m_{AB}=\frac{y_۲-y}{x_۲-x}$

$AB=\sqrt{(۳-۲)^۲+(۲+۲)^۲}=\sqrt{۱+۱۶}=\sqrt{۱۷}$, $m_{AB}=\frac{۲+۲}{۳-۲}=۴$

$A'B'=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۷-۳)^۲}=\sqrt{۱+۱۶}=\sqrt{۱۷}$, $m_{AB}=\frac{۷-۳}{۱-۰}=۴$

برای سایر اضلاع و نقاط نیز به همین ترتیب.

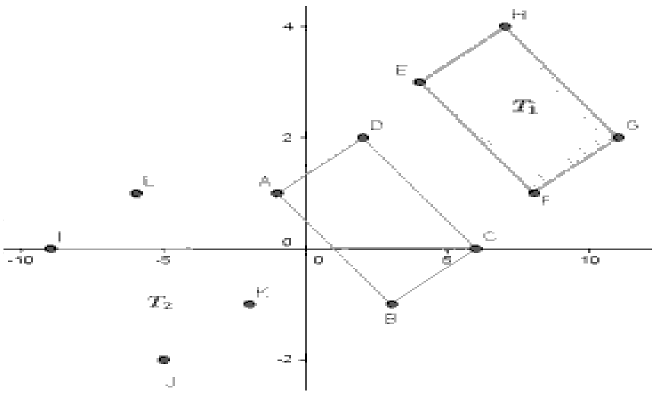
۵- الف)

$T_۱(A)=(-۱+۵,۱+۲)=(۴,۳$

$T_۱(B)=(۳+۵,-۱+۲)=(۸,۱$

$T_۱(c)=(۶+۵,۰+۲)=(۱۱,۲)$

$T_۱(D)=(۲+۵,۲+۲)=(۷,۴$



$T_۲(A)=(-۱-۸,۱-۱)=(-۹,۰)$

$T_۲(B)=(۳-۸,-۱-۱)=(-۵,-۲)$

$T_۲(C)=(۶-۸,۵-۱)=(-۲,-۱)$

$T_۲(D)=(۲-۸,۲-۱)=(-۶,۱)$

ب) نمودار هر دو در صفحه قبل

۶- الف)

$T_۱(A)=(۲,-۱)$

$T_۱(B)=(۸,-۱)$

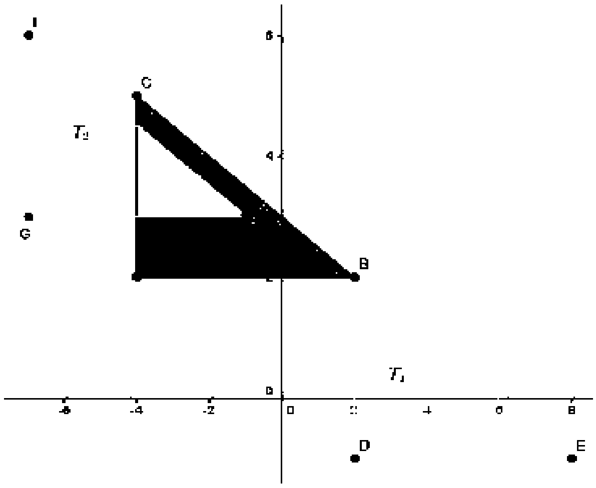
$T_۱(C)=(۲,۲)$

ب)

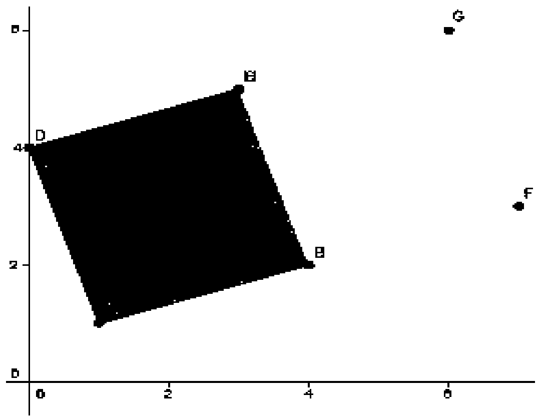
$T_۲(A)=(-۷,۳)$

$T_۲(B)=(-۱,۳)$

$T_۲(C)=(-۷,۶)$



۷-



$A\rightarrow B,(۱,۱)\rightarrow(۴,۲)$

$\Rightarrow T(x,y)=(x+۳,y+۱)$

$A'=T(A)=T(۱,۱)=(۴,۲)$

$B'=T(B)=T(۴,۲)=(۷,۳)$

$C'=T(C)=T(۳,۵)=(۶,۶)$

$D'=T(D)=T(۰,۴)=(۳,۵)$

۸- ضابطه نگاشت انتقال عبارت است از

الف) $A\rightarrow C,(۱,۱)\rightarrow(۳,۵)\Rightarrow T(x,y)=(x+۲,y+۴)$

ب) $A\rightarrow D,(۱,۱)\rightarrow(۰,۴)\Rightarrow T(x,y)=(x-۱,y+۳)$

۹-

$P' = T(P) = (-۳+۸, ۰+۱) = (۵,۱)$

$Q' = T(Q) = (۵+۸, ۴+۱) = (۱۳,۵)$

$R' = T(R) = (۲+۸, -۲+۱) = (۱۰,-۱)$

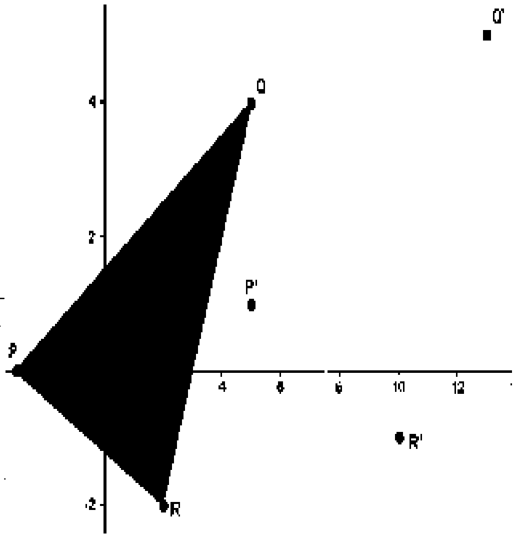
$PQ = \sqrt{(۵+۳)^۲ + (۴-۰)^۲} = \sqrt{۶۴+۱۶} = \sqrt{۸۰}$

$P'Q' = \sqrt{(۱۳+۵)^۲ + (۵-۱)^۲} = \sqrt{۶۴+۱۶} = \sqrt{۸۰}$

$PR = \sqrt{۲۹} = P'R' \; , \; QR = \sqrt{۴۵} = Q'R'$

$m_{PQ} = \frac{۴-۰}{۵+۳} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}, m_{P'Q'} = \frac{۵-۱}{۱۳-۵} = \frac{۴}{۸} =$

$m_{PR} = -\frac{۲}{۵} = m_{P'R'} \; , \; m_{RQ} = ۲ = m_{R'Q'}$



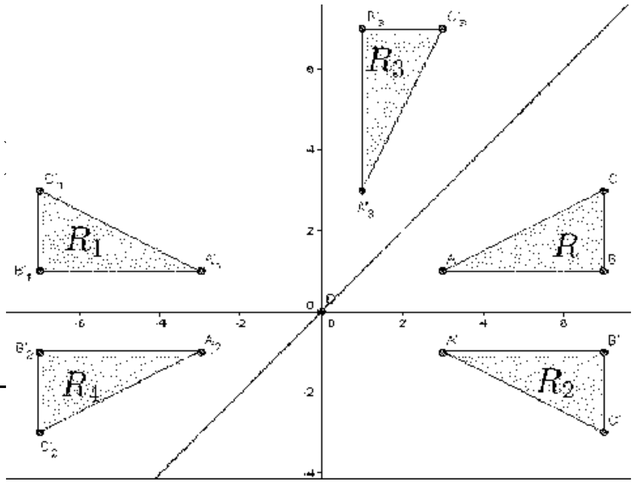
طول اضلاع و شیب آنها با هم برابر است . بنابراین مساحتشان هم برابر است.

۱۰- هر بلوک ستونی به اندازه ی دوبرابر پهنای خود و به موازات افق انتقال یافته است.

۱- کافیست در هر مورد بازتاب یافته چهار رأس چهار ضلعی را یافته و نقاط حاصل را به هم وصل کنیم.

۲- خطوطی که هر نقطه را به تصویرش وصل می کند باید با هم موازی باشند پس تنها شکلهای a,b,d را می توان بازتاب یافته شکل سایه دار دانست.

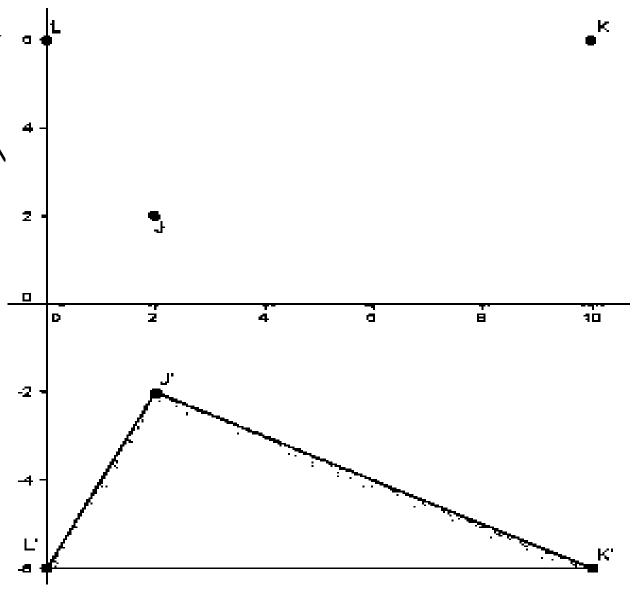
۳- الف) ب) ث) ت)



$R_۱(A)=(-۳,۱)\ ,\ R_۱(B)=(-۷,۱)$
$R_۱(C)=(-۷,۳)$
$R_۲(A)=(۳,-۱)\ ,\ R_۲(B)=(۷,-۱$
$R_۲(C)=(۷,-۳)$
$R_۳(A)=(۱,۳)\ ,\ R_۳(B)=(۱,۷)$
$R_۳(C)=(۳,۷)$
$R_۴(A)=(-۱,-۳)\ ,R_۴(B)=(-۱,-$
$R_۴(C)=(-۳,-۷)$

٤- الف) $R(J)=(۲,-۲)\ ,\ R(K)=(۱۰,-۶)\ ,\ R(L)=(۰,-۶)$

ب)



$JK=\sqrt{(۱۰-۲)^۲+(۶-۲)^۲}=\sqrt{۸۰}$

$J'K'=\sqrt{(۱۰-۲)^۲+(-۶+۲)^۲}=۱$

$m_{JK}\ \frac{۶-۲}{۱۰-۲}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

$m_{J'K'}=\frac{-۶+۲}{۱۰-۲}=\frac{-۴}{۸}=-\frac{۱}{۲}$

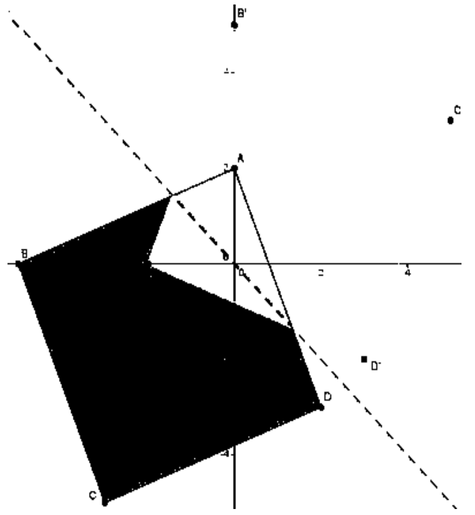
$\Rightarrow JK=J'K'\ ,\ m_{JK}\neq m_{J'K'}$

$JL=J'L'=\sqrt{۲۰}\ , KL=K'L'=۱۰$

چون $JL^۲+JK^۲=KL^۲\Rightarrow \hat{J}=۹۰^\circ$ پس $S_{JKL}=S_{J'K'L'}=\frac{۱}{۲}JK\times JL=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸۰}\times\sqrt{۲۰}=۲۰$

با محاسبه می یابیم که $m_{LK}=m_{L'K'}\ ,m_{LJ}\neq m_{L'J'}$.

۵- الف)



$$A' = R(۰,۲) = (-۲,۰)$$
$$B' = R(B) = (۰,۵)$$
$$C' = R(C) = (۵,۳)$$
$$D' = R(D) = (۳,-۲)$$

ب)

$$\left.\begin{array}{l} AB = \sqrt{(-۵-۰)^۲ + (۰-۲)^۲} = \sqrt{۲۵+۴} = \sqrt{۲۹} \\ A'B' = \sqrt{(-۲-۰)^۲ + (۰-۵)^۲} = \sqrt{۴+۲۵} = \sqrt{۲۹} \end{array}\right\}$$

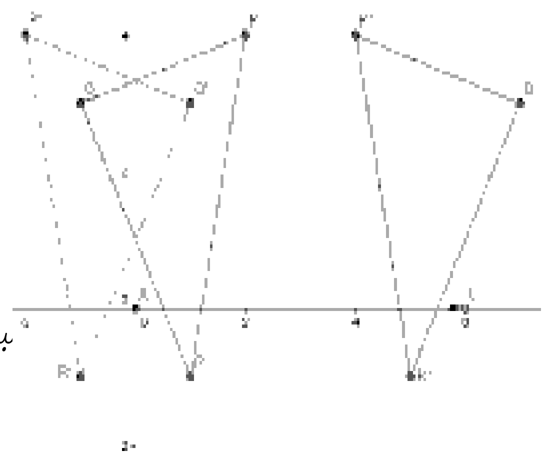
$$\Rightarrow AB = A'B'$$

$$m_{AB} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۰-۲}{-۵-۰} = \frac{-۲}{-۵} = \frac{۲}{۵}, \quad m_{A'B'} = \frac{۰-۵}{-۲-۰} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \quad m_{AB} \neq m_{A'B'}$$

$$S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'} = (AB)^۲ = ۲۹$$

به همین ترتیب طول و شیب سایر اضلاع بررسی گردد.

۶-

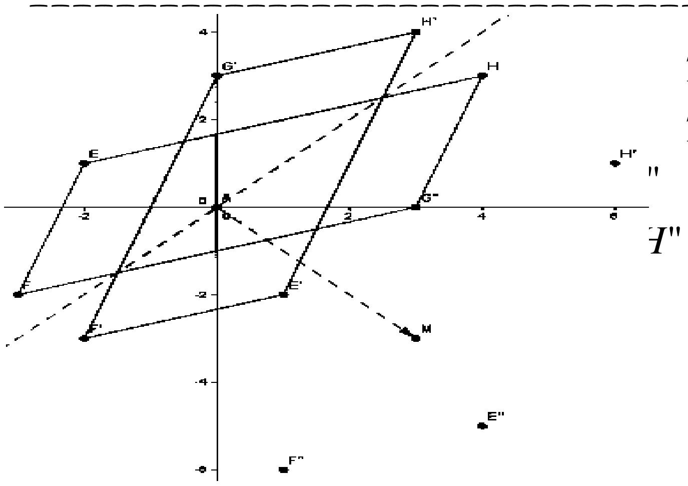


الف)
$$F(P) = F(-۲+۶,۴) = (۴,۴) = P''$$
$$F(Q) = F(-۱,۳) = (۱+۶,۳) = (۷,۳) = Q''$$
$$F(R) = F(۱,-۱) = (-۱+۶,-۱) = (۵,-۱) = R''$$

ب) ...بت به محور y ها وآنگاه انتقال با بردار انتقال (۶,۰)

۷- الف)

$$T(E) = (۱+۳,-۲-۳) = (۴,-۵) = E''$$
$$T(F) = (-۲+۳,-۳-۳) = (۱,-۶) = F''$$



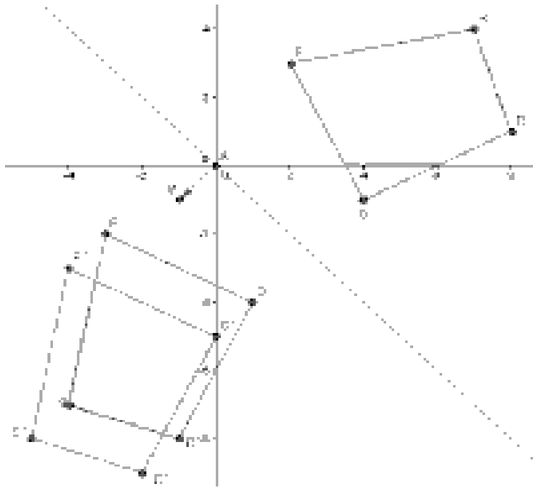
ب) بازتاب نسبت به خط $y = x$ و

آنگاه انتقال بابردار انتقال (۳,-۳)

۸-

الف)

$$G(P)=(-۳-۱,-۲-۱)=(-۴,-۳)=P''$$
$$G(Q)=(۱-۱,-۴-۱)=(۰,-۵)=Q''$$
$$G(R)=(-۱-۱,-۸-۱)=(-۲,-۹)=R''$$
$$G(S)=(-۴-۱,-۷-۱)=(-۵,-۸)=S''$$



ب) باز تاب نسبت به خط $y=-x$ و

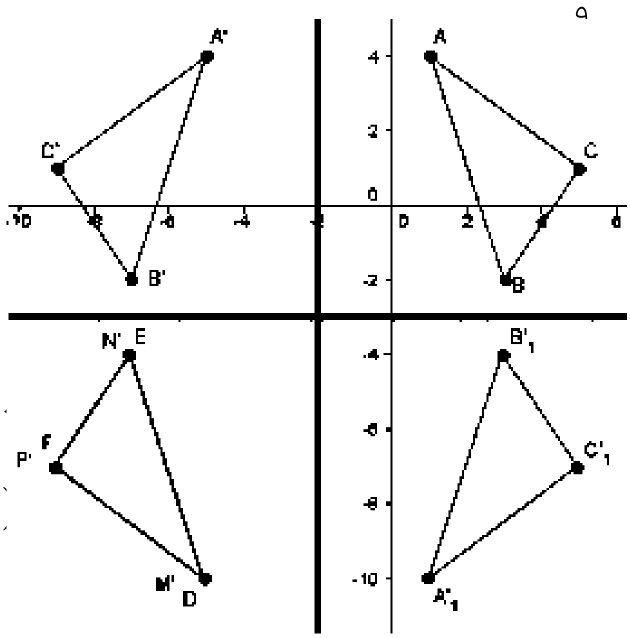
آنگاه انتقال بابردار انتقال $(-۱,-۱)$

۵

$$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$$

الف)

$$A':\frac{x'+۱}{۲}=-۲ \Rightarrow x'=-۵ \Rightarrow A'=(-۵,۴)$$
$$B':\frac{x'+۳}{۲}=-۲ \Rightarrow x'=-۷ \Rightarrow B'(-۷,-۲)$$
$$C':\frac{x'+۵}{۲}=-۲ \Rightarrow x'=-۹ \Rightarrow C'(-۹,۱)$$
$$y+۳=۰ \Rightarrow y=-۳$$
$$A'':\frac{y'+۴}{۲}=-۳ \Rightarrow y'=-۱۰ \Rightarrow A'_۱=(۱,-۱۰$$
$$B'':\frac{y+(-۲)}{۲}=-۳ \Rightarrow y'=-۴ \Rightarrow B'_۱(۳,-۴$$
$$C'':\frac{y'+۱}{۲}=-۳ \Rightarrow y'=-۷ \Rightarrow C'_۱(۵,-۷)$$



$$y+۳=۰ \Rightarrow y=-۳$$

ب)

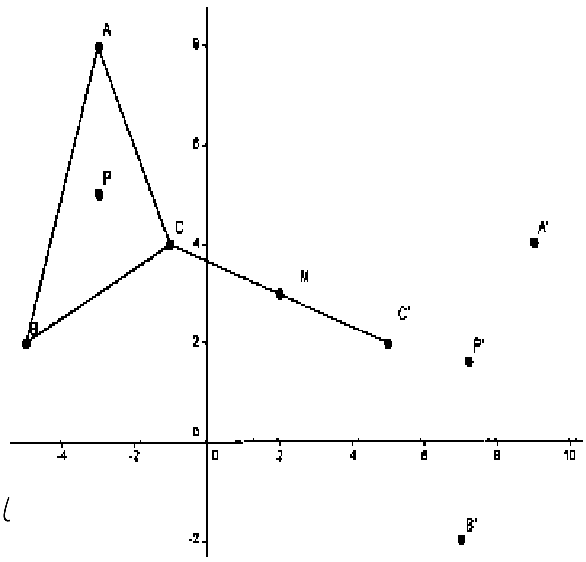
$$A':\frac{y+۴}{۲}=-۳ \Rightarrow y=-۱۰ \Rightarrow D=(-۵,-۱۰)$$
$$B':\frac{y-۲}{۲}=-۲ \Rightarrow y=-۲ \Rightarrow E=(-۷,-۲)$$
$$C':\frac{y+۱}{۲}=-۳ \Rightarrow y=-۷ \Rightarrow F(-۹,-۷)$$

$$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$$

پ)
$$A'':\ \frac{x+۱}{۲}=-۲ \Rightarrow x=-۵ \Rightarrow M'(-۵,-۱۰)$$
$$B'':\ \frac{x+۳}{۲}=-۲ \Rightarrow x=-۷ \Rightarrow N'(-۷,-۲)$$
$$C'':\ \frac{x+۵}{۲}=-۲ \Rightarrow x=-۹ \Rightarrow P'(-۹,-۷)$$

نتیجه : ترکیب دو تقارن محوری خاصیت جابجائی دارد و نتیجه دو تقارن یکسان است.

۱۰- الف)



ب) محور تقارن عمود منصف CC' است پس،

$$C(-۱,۴),C'(۵,۲) \Rightarrow M:\begin{cases} x_M=\dfrac{-۱+۵}{۲}=۲ \\ y_M=\dfrac{۴+۲}{۲}=۳ \end{cases}$$

$$m_{CC'}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۴-۲}{-۱-۵}=\frac{۲}{-۶}=\frac{-۱}{۳}$$

$$\Rightarrow m=۳, M(۲,۳), y-y_۱=m(x-x_۱)$$

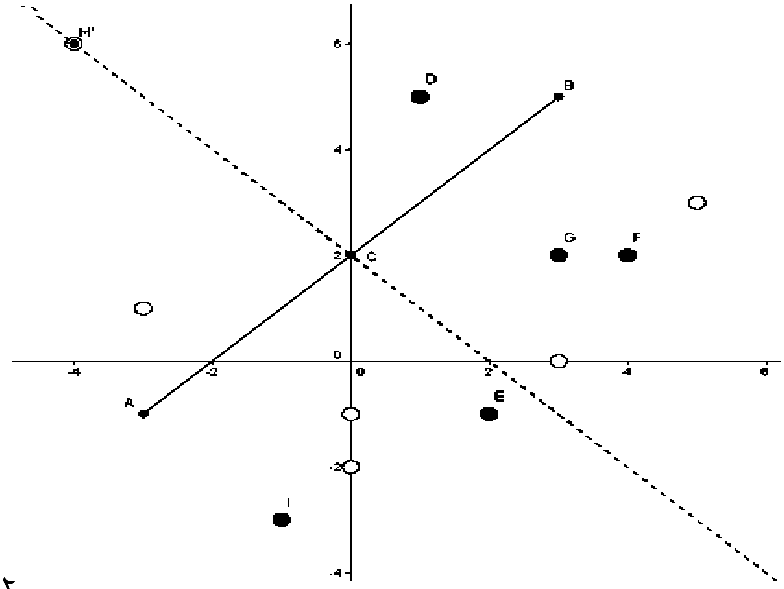
$$\Rightarrow y-۳=۳(x-۲) \Rightarrow y=۳x-۳$$ ادله محور تقارن

پ) $P(-۳,۵)$ نسبت به خط $y=۳x-۳$ برابراست با $P'(x,y)$ که

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x-۳}{۲},\dfrac{y+۵}{۲}\right)\in L \Rightarrow \dfrac{y+۵}{۲}=۳\left(\dfrac{x-۳}{۲}\right)-۳ \Rightarrow y=۳x-۲۰ \\ m_{PP'}=\dfrac{-۱}{۳} \Rightarrow \dfrac{y-۵}{x+۳}=\dfrac{-۱}{۳} \Rightarrow ۳y=-x+۱۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x-y=۲۰ \\ x+۳y=۱۲ \end{cases} \Rightarrow x=\frac{۷۲}{۱۰}, y=\frac{۱۶}{۱۰} \Rightarrow P'\left(\frac{۷۲}{۱۰},\frac{۱۶}{۱۰}\right)$$

۱۱- الف ، ب)



پ)

$$P(-۳,-۱),P'(۳,۵)$$

$$\Rightarrow M:\begin{cases} x_m=\dfrac{-۳+۳}{۲}=۰ \\ y_m=\dfrac{-۱+۵}{۲}=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(۰,۲),m_{pp'}=\dfrac{۵+۱}{۳+۳}=۱$$

معادله محور بازتاب

$$\Rightarrow y-۲=۱(x-۰)\Rightarrow y=x+۲$$

۱۲- با استفاده از رابطه مختصات وسط پاره خط داریم ،

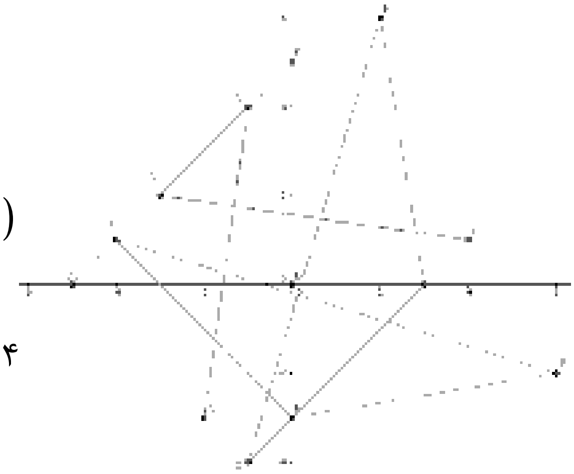
$$A(x,y)\ ,\ A'(x',y')\Rightarrow OA=OA'\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{x+x'}{۲}=۰\Rightarrow x'=-x \\ \dfrac{y+y'}{۲}=۰\Rightarrow y'=-y \end{cases}\Rightarrow A'(-x,-y)$$

۱- الف)

$$R(۴,۱)=(-۱,۴)$$
$$R(۰,۵)=(-۵,۰)$$
$$R(-۳,۲)=(-۲,-۳)$$

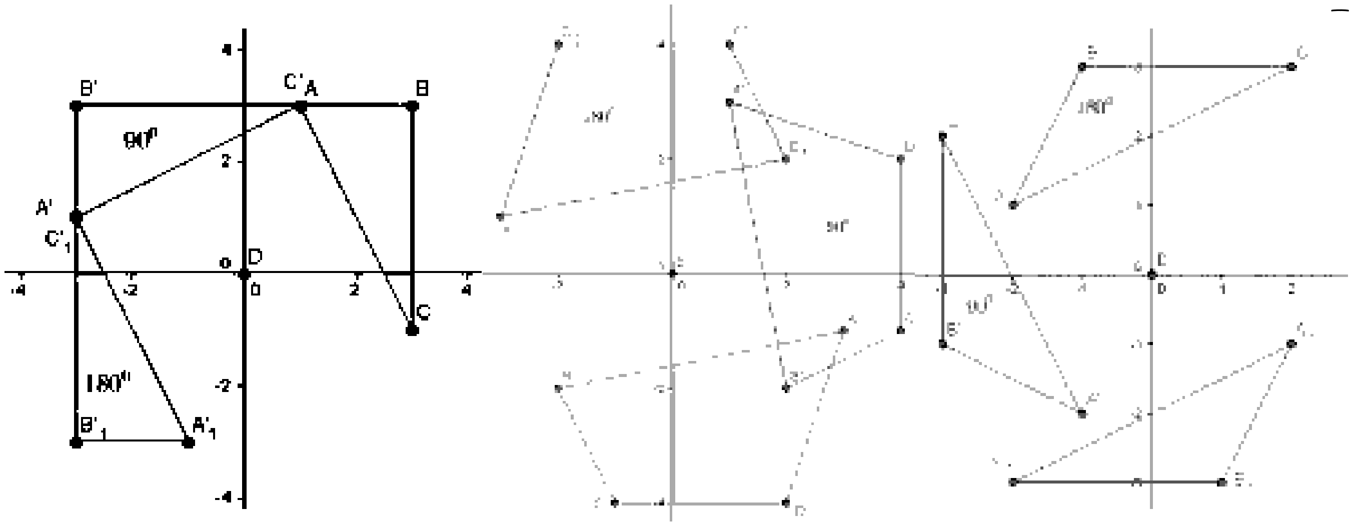
ب)

$$R(x,y)=(-y,x)=(۲,۶)\Rightarrow(x,y)=(۶,-۲)$$
$$R(x,y)=(-y,x)=(۳,۰)\Rightarrow(x,y)=(۰,-۳)$$
$$R(x,y)=(-y,x)=(-۱,-۴)\Rightarrow(x,y)=(-۴$$



۲- در دوران تمام اضلاع با یک زاویه و به یک جهت دوران یافته اند ، با مشاهده می توان یافت که a,d,f,c دوران یافته شکل سایه دار می توانند باشند.

۳-



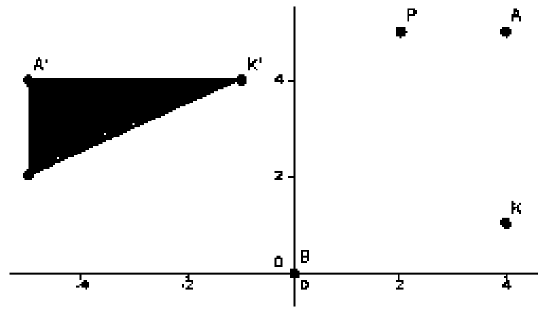
۴- الف)

$$R(P)=R(۲,۵)=(-۵,۲)=P',\qquad R(A)=R(۴,۵)=(-۵,۴)=A'$$
$$R(K)=R(۴,۱)=(-۱,۴)=K'$$

ب)

$$AP=\sqrt{(۵-۵)^۲+(۲-۴)^۲}=\sqrt{۴}=۲$$
$$A'P'=\sqrt{(۲-۴)^۲+(-۵+۵)^۲}=\sqrt{۴}=۲\Rightarrow AP=A'P'$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{AP}=\dfrac{۵-۵}{۲-۴}=۰ \\ m_{A'P'}=\dfrac{۲-۴}{-۵+۵}\text{ت} \end{array}\right\}\Rightarrow m_{AP}\neq m_{A'P'}$$



به همین ترتیب برای سایر اضلاع طول مساوی و شیب نامساوی به دست می آید.

$$\left.\begin{array}{l} S_{PAK}=\frac{۱}{۲}PA\times AK=\frac{۱}{۲}(۲\times ۴)=۴ \\ S_{P'A'K'}=\frac{۱}{۲}P'A'\times A'K'=\frac{۱}{۲}(۲\times ۴)=۴ \end{array}\right\}\Rightarrow S_{PAK}=S_{P'A'K'}$$

۵- الف) $R(A)=R(-۱,-۲)=(-۲,۱)=A' \quad ,R(M)=R(۷,۲)=(۲,-۷)=M'$

$R(I)=R(۵,۶)=(۶,-۵)=I' \quad ,R(N)=R(-۳,۲)=(۲,۳)=N'$

ب) $$\left.\begin{array}{l} AM=\sqrt{(۷+۱)^۲+(۲+۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۸۰} \\ A'M'=\sqrt{(۲+۲)^۲+(-۷-۱)^۲}=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۸۰} \end{array}\right\}\Rightarrow AM=A'M'$$

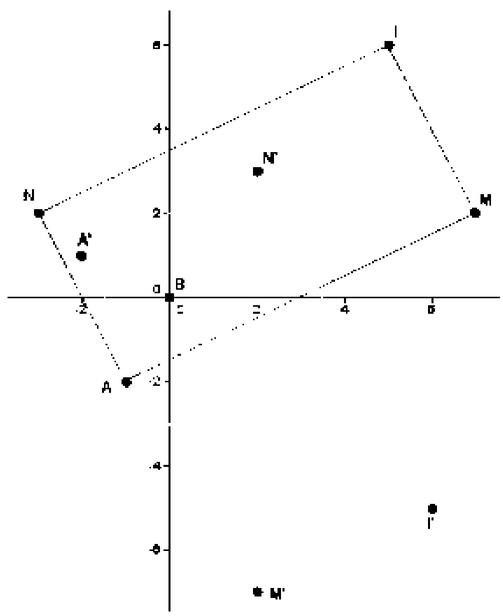
$$m_{AM}=\frac{۲+۲}{۷+۱}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}, \qquad m_{A'M'}=\frac{-۷-۱}{۲+۲}=\frac{-۸}{۴}=-۲$$

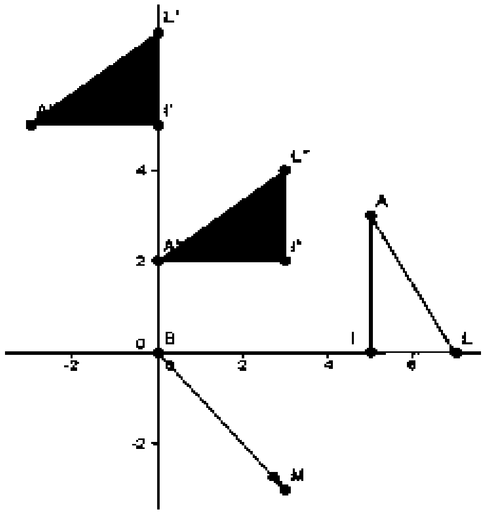
همین ترتیب برای سایر اضلاع طول مساوی و

شیب نامساوی به دست می آید.

$$S_{AMIN}=AM\times MI$$
$$=\sqrt{۸۰}\times\sqrt{۲۰}=\sqrt{۱۶۰۰}=۴۰=S_{A'M'I'N'}$$

مساحت دو مستطیل با هم برابر است.



۶- 

الف)
$$F(A)=F(۵,۳)=(-۳+۳,۵-۳)=(۰,۲)=A'_۱$$
$$F(L)=F(۷,۰)=(-۰+۳,۷-۳)=(۳,۴)=L'_۱$$
$$F(I)=F(۵,۰)=(-۰+۳,۵-۳)=(۳,۲)=I'_۱$$

ب)
$$R(A)=(-۳,۵)=A'$$
$$R(L)=(۰,۷)=L',\quad R(I)=(۰,۵)=I'$$
$$T(A')=(-۳+۳,۵-۳)=(۰,۲)=A''$$
$$T(L')=(۰+۳,۷-۳)=(۳,۴)=L''$$
$$T(I')=(۰+۳,۵-۳)=(۳,۲)=I''$$
الف+ب $\Rightarrow A''=A'_۱, L''=L'_۱, I''=I'_۱$

۷-

الف) $F(O)=(۲+۶,-۲)=(۸,-۲)$ $\quad F(H)=(-۱+۶,-۳)=(۵,-۳)$

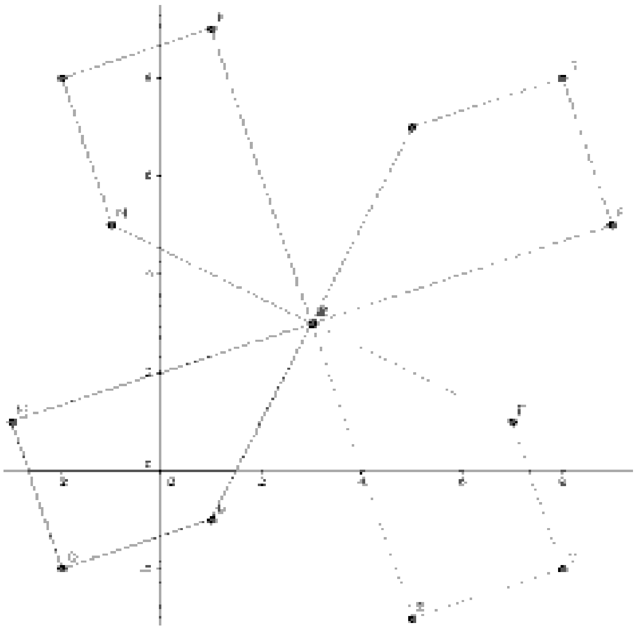
$F(A)=(-۳+۶,۳)=(۳,۳)$ $\quad F(M)=(+۱+۶,۱)=(۷,۱)$

ب) $G(O)=(۲+۶,۲+۶)=(۸,۸)$ $\quad G(H)=(+۳+۶,-۱+۶)=(۹,۵)$

$G(A)=(-۳+۶,-۳+۶)=(۳,۳)$ $\quad G(M)=(-۱+۶,۱+۶)=(۵,۷)$

پ) $S(O)=(-۲,۲+۶)=(-۲,۸)$ $\quad S(H)=(۱,۳+۶)=(۱,۹)$

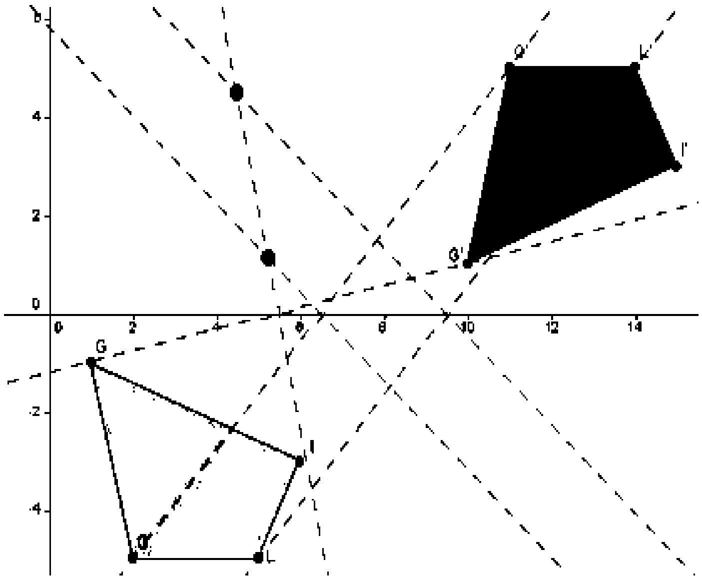
$S(A)=(۳,-۳+۶)=(۳,۳)$ $\quad S(M)=(-۱,-۱+۶)=(-۱,۵)$



۸- الف) $T(G)=(۱+۹,۱)=(۱۰,۱)=G'$, $T(O)=(۲+۹,۳)=(۱۱,۵)=O'$

$T(L)=(۵+۹,۵)=(۱۴,۵)=L'$, $T(I)=(۶+۹,۳)=(۱۵,۳)=I'$

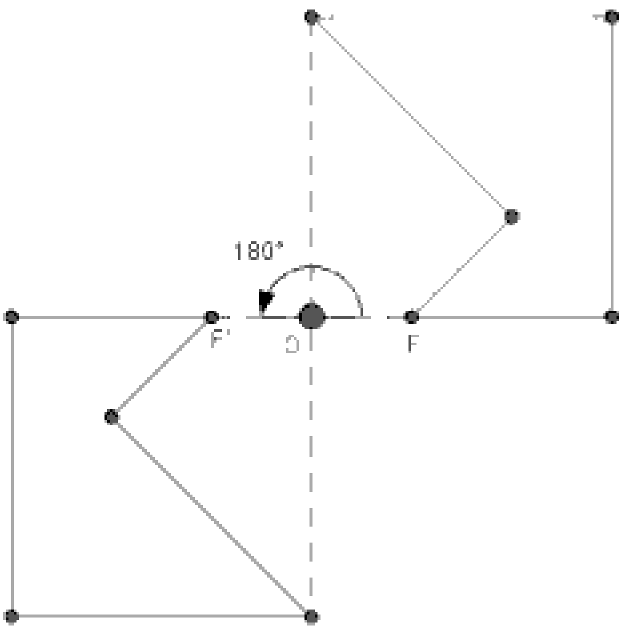
ب) $m_{GG'}=\frac{۱+۱}{۱۰-۱}=\frac{۲}{۹}\,,\,m_{OO'}=\frac{۵+۵}{۱۱-۲}=\frac{۱۰}{۹}\Rightarrow m_{OO'}\neq m_{GG'}$

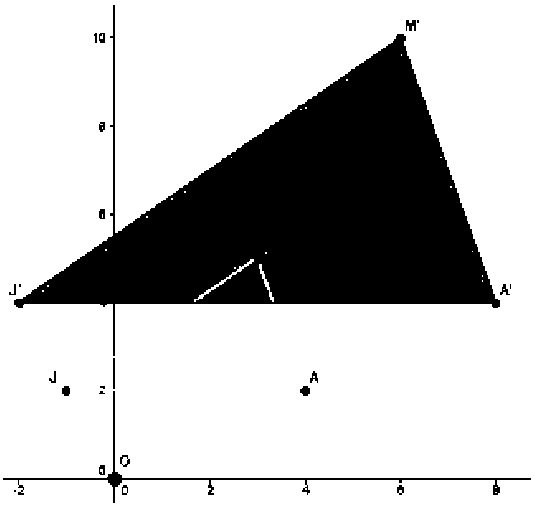


در انتقال شیب حفظ می شود که چنین نیست.
در بازتاب عمودمنصف پاره خطهای واصل بین نقاط نظیر(محور تقارن) یکتاست که چنین نیست.
در دوران عمودمنصف پاره خطهای واصل بی نقاط نظیر همرسند که چنین نیست (خطوط قرمز)

۹- کافیست نقاط را به دوران یافته آنها وصل و عمود منصف پاره خط واصل را رسم کنیم.

محل برخورد این عمود منصفها مرکز دوران است.
برای یافتن زاویه دوران ،
یک نقطه دلخواه را به مرکز دوران و سپس تبدیل یافته همان نقطه وصل می کنیم .
زاویه ایجاد شده زاویه دوران است.
در این مثال خاص عمود منصفها بر خطهای واصل منطبقند و زاویه دوران °۱۸۰ است.





۱- الف)

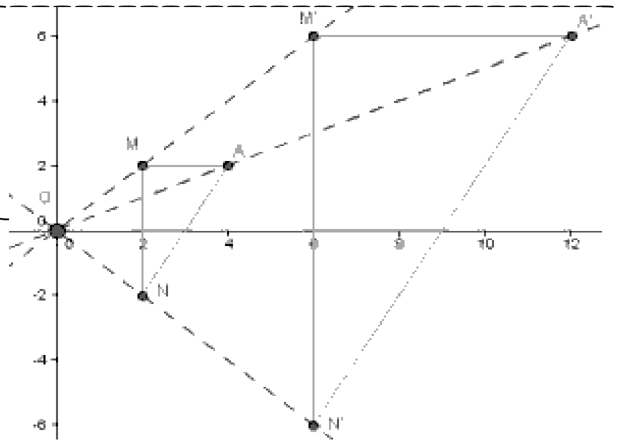
ب)
$$D(J)=(-۲,۴)=J'$$
$$D(A)=(۸,۴)=A'$$
$$D(M)=(۶,۱۰)=M'$$

پ)
$$JA=\sqrt{(۴+۱)^۲+(۲-۲)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$
$$J'A'=\sqrt{(۸+۲)^۲+(۴-۴)^۲}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$$
$$\Rightarrow J'A'=۲JA$$
$$m_{JA}=\frac{۲-۲}{۴+۱}=۰\ ,\ m_{J'A'}=\frac{۴-۴}{۸+۲}=۰\ \Rightarrow m_{JA}=m_{J'A'}$$

به همین ترتیب سایر اضلاع دوبرابر و شیبها برابر هستند.

ت) مرکز تجانس $o(۰,۰)$ و نسبت تجانس $k=۲$ است.

۲-



الف)+ب)
$$D(M)=D(۲,۲)=(۶,۶)=M'$$
$$D(A)=D(۴,۲)=(۱۲,۶)=A'$$
$$D(N)=D(۲,-۲)=(۶,-۶)=N'$$

پ)
$$OA=\sqrt{۴^۲+۲^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}\ ,\ OA'=\sqrt{۱۲^۲+۶^۲}=\sqrt{۱۸۰}=۶\sqrt{۵}$$
$$OM=\sqrt{۲^۲+۲^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}\ ,\ OM'=\sqrt{۶^۲+۶^۲}=\sqrt{۷۲}=۶\sqrt{۲}$$
$$ON=\sqrt{۲^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}\ ,\ ON'=\sqrt{۶^۲+(-۶)^۲}=\sqrt{۷۲}=۶\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow \frac{OA'}{OA}=\frac{OM'}{OM}=\frac{ON'}{ON}=۳$$

ت)

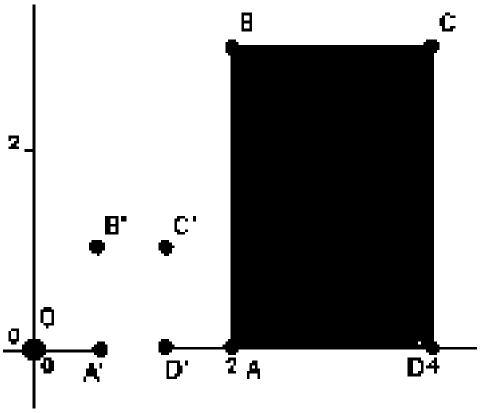
$$AM=\sqrt{۲^۲+۰^۲}=\sqrt{۴}=۲ \quad , \quad A'M'=\sqrt{۶^۲+۰^۲}=\sqrt{۳۶}=۶ \ ,$$

$$AN=\sqrt{۲^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵} \ , \quad A'N'=\sqrt{۶^۲+۱۲^۲}=\sqrt{۱۸۰}=۶\sqrt{۵}$$

$$MN=\sqrt{۰^۲+۴^۲}=\sqrt{۱۶}=۴ \ , \quad M'N'=\sqrt{۰^۲+۱۲^۲}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$$

$$\Rightarrow \frac{A'M}{AM}=\frac{A'N'}{AN}=\frac{M'N'}{MN}=۳$$

ث) عامل مقیاس $k=۳$ است.



۳- الف)

$$D(x,y)=(\frac{۱}{۳}x,\frac{۱}{۳}y)\Rightarrow D(A)=(\frac{۲}{۳},۰)$$

$$,\ D(B)=(\frac{۲}{۳},۱)\ ,\ D(C)=(\frac{۴}{۳},۱)\ ,\ D(D)=(\frac{۴}{۳},۰)$$

ب) $k=\frac{۱}{۳}$ پس انقباض است

پ)

$$OB=\sqrt{۲^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۳} \ , \quad OB'=\sqrt{(\frac{۲}{۳})^۲+۱^۲}=\sqrt{\frac{۴}{۹}+۱}=\sqrt{\frac{۱۳}{۹}}=\frac{۱}{۳}\sqrt{۱۳}$$

$$OC=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=\sqrt{۲۵}=۵ \ , \quad OC'=\sqrt{(\frac{۴}{۳})^۲+۱^۲}=\sqrt{\frac{۱۶}{۹}+۱}=\sqrt{\frac{۲۵}{۹}}=\frac{۵}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{OC'}{OC}=\frac{OB'}{OB}=\frac{۱}{۳}$$

ت)

$$AB=\sqrt{۰^۲+۳^۲}=\sqrt{۹}=۳ \ , \ BC=\sqrt{۲^۲+۰^۲}=\sqrt{۴}=۲\Rightarrow S_{ABCD}=۳\times۲=۶$$

$$A'B'=\sqrt{۰^۲+۱^۲}=\sqrt{۱}=۱ \ , \ B'C'=\sqrt{(\frac{۲}{۳})^۲+۰^۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow S_{A'B'C'D'}=\frac{۱}{۱}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۶}{۱}}=\frac{۲}{۱۸}=\frac{۱}{۹}=k^۲$$

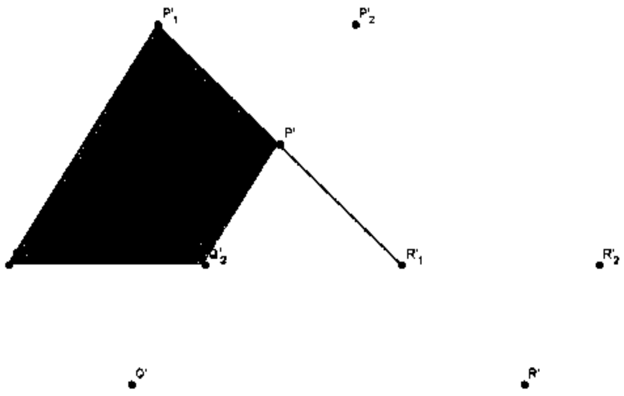
٤- می توان نقاط رابه مبدأ (مرکزتجانس وصل) ومثلا OB' را چنان بیابیم که $OB' = ۲OB$ (برای الف) و یا با توجه به ضابطه تجانس $D(x,y) = (۲x,۲y)$ (برای الف) مختصات مجانس ها رابیابیم.

٥- نقاط نظیرمثلا A,B وهمچنین پای پرچم ها را به هم وصل و امتداد داده تا همرا در O (مرکز تجانس) و سپس نسبت بین اضلاع(نسبت تجانس) را می یابیم. $\dfrac{OB}{OA} = k$.

٦- شکل سمت راست) مثلا نقطه X'چنان انتخاب $OX' = k.OX \Rightarrow \dfrac{OX'}{OX} = k \Rightarrow \dfrac{OY'}{OY} = k$ و ....

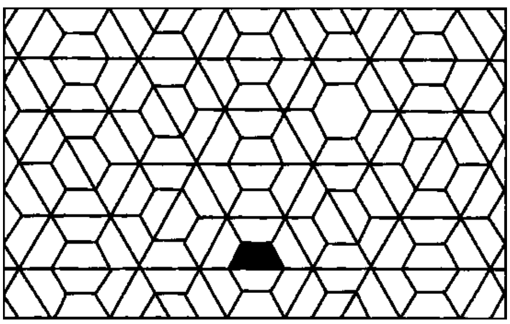
شکل سمت چپ) مثلا نقطه P'چنان انتخاب $OP' = k.OP \Rightarrow \dfrac{OP'}{OP} = k \Rightarrow \dfrac{OQ'}{OQ} = k$ و ....

٧- در هریک از مثلثها با اندازه گیری طول یک ضلع و ارتفاع نظیر آن نسبت مساحتها نسبت به مثلث اولیه ۴ (مربع نسبت تجانس) به دست می آید.



٨- الف) محیط دوبرابر و مساحت چهار برابر است.

ب) در این شکل انتقال،تجانس بازتاب و دوران وجود دارد.



۱- الف)

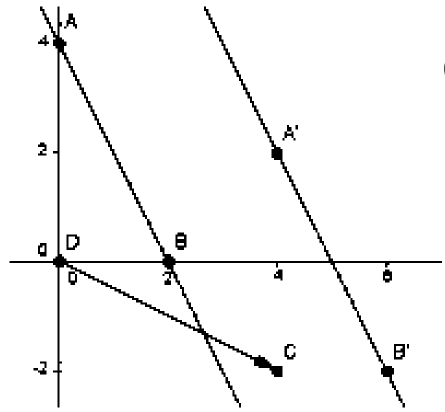
$$۲x+y-۴=۰ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۲ \\ \hline y & ۴ & ۰ \end{array} \Rightarrow A(۰,۴)\ ,\ B(۲,۰)$$

ب)

$$T(A)=(۴,۲)=A'\ ,\ T(B)=(۶,-۲)=B'$$

$$m_{A'B'}=\frac{۲+۲}{۴-۶}=\frac{۴}{-۲}=-۲$$

$$y-۲=-۲(x-۴) \Rightarrow y=-۲x+۱۰$$



۲- الف)

$$۲x+۶y-۱۲=۰ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۶ \\ \hline y & ۲ & ۰ \end{array} \Rightarrow A(۰,۲)\ ,\ B(۶,۰)$$

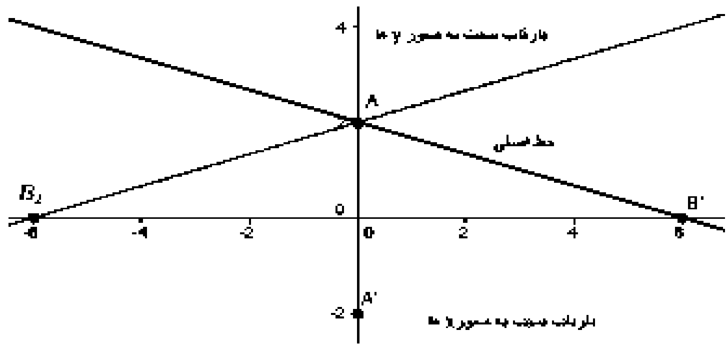
ب) محور x ها $R(x,y)=(x,-y) \Rightarrow A'=R(A)=(۰,-۲)\ ,\ B'=R(B)=(۶,۰)$

$$m_{A'B'}=\frac{۰+۲}{۶-۰}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\quad ,\quad y+۲=\frac{۱}{۳}(x-۰) \Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x-۲$$

محور y ها $R(x,y)=(-x,y) \Rightarrow A''=R(A)=(۰,۲)\ ,\ B''=R(B)=(-۶,۰)$

$$m_{A'B'}=\frac{۰-۲}{-۶-۰}=\frac{۱}{۳}$$

$$y-۲=\frac{۱}{۳}(x-۰) \Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x+۲$$



۳- الف)

$$y=۲x+۳ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۳ & ۵ \end{array} \Rightarrow A(۰,۳)\quad ,\quad B(۱,۵)$$

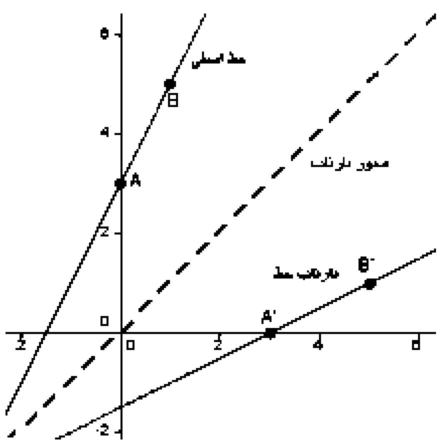
ب)

$$R(x,y)=(y,x) \Rightarrow A'=R(A)=(۳,۰)$$

$$B'=R(B)=(۵,۱)$$

$$m_{A'B'}=\frac{۰-۱}{۳-۵}=\frac{-۱}{-۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$y-۰=\frac{۱}{۲}(x-۳) \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$$



۴-

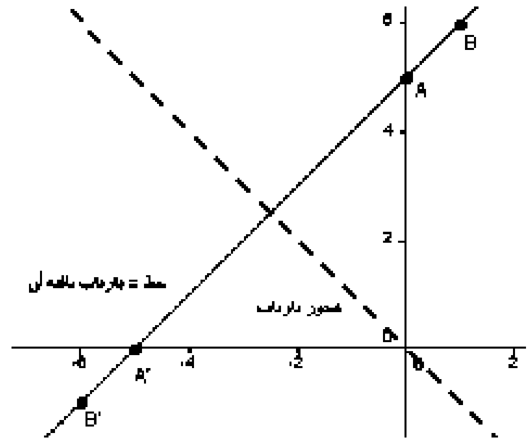
$$y=x+5 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 5 & 6 \end{array} \; A(0,5)\,,\,B(1,6)$$

$$R(x,y)=(-y,-x)$$

$$\Rightarrow A'=(-5,0) \quad , \quad B'=(-6,-1)$$

$$\Rightarrow m_{A'B'}=\frac{0+1}{-5+6}=\frac{1}{1}=1$$

$$, \quad y-0=1(x+5) \;\Rightarrow\; y=x+5$$



۵-

$$3x-y+6=0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & -2 \\ \hline y & 6 & 0 \end{array} \Rightarrow A(0,6)\,,\,B(-2,0)$$

الف) $R(x,y)=(-y,x) \Rightarrow A'(-6,0) \;,\; B'(0,-2) \;\Rightarrow\; m_{A'B'}=\dfrac{-2-0}{0+6}=\dfrac{-2}{6}=-\dfrac{1}{3}$

$$y-0=-\frac{1}{3}(x+6) \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{3}x-2$$

ب) $R(x,y)=(-x,-y) \Rightarrow A'=(0,-6)\;,\;B'=(2,0) \Rightarrow m_{A'B'}=\dfrac{0+6}{2-0}=\dfrac{6}{2}=3$

$$y-0=3(x-2) \Rightarrow y=3x-6$$

پ) $R(x,y)=(y,-x) \Rightarrow A'=(6,0)\,,\,B'=(0,2) \Rightarrow m_{A'B'}=\dfrac{2-0}{0-6}=\dfrac{2}{-6}=\dfrac{-1}{3}$

$$y-0=\frac{-1}{3}(x-6) \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+2$$

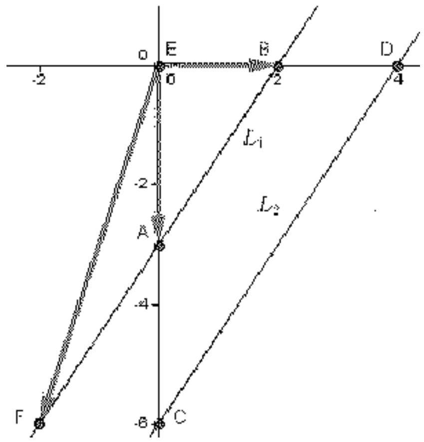
۶-

الف) $L_1: 3x-2y-6=0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & -3 & 0 \end{array} \qquad L_2: 3x-2y-12=0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 4 \\ \hline & -6 & 0 \end{array}$

$$T(x,y)=(x+h,y+k)=(x',y') \Rightarrow \begin{cases} x'=x+h \Rightarrow x=x'-h \\ y'=y+k \Rightarrow y=y'-k \end{cases}$$

ب) $3(x'-h)-2(y'-k)-6=0 \Rightarrow (3x'-2y'-3h+2k-6=0) \approx (3x'-2y'-12=0)$

$$\Rightarrow -3h+2k-6=-12 \Rightarrow 2k-3h=-6 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} h & 2 & 0 & -2 \\ \hline k & 0 & -3 & -6 \end{array}$$



راه دیگر با توجه به موازی بودن دوخط آن است که هر دو نقطه دلخواه بر L_1, L_2 در نظر گرفته ،
بردار انتقال $\vec{v}=(x_۲-x_۱, y_۲-y_۱)$ خواهد بود.

۷- محور بازتاب از دو خط مذ بور به یک فاصله است پس

$$d_۱=d_۲ \Rightarrow \frac{|x+y-۳|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{|x+y+۳|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} \Rightarrow |x+y-۳|=|x+y+۳|$$

$$\Rightarrow x+y-۳=x-y-۳ \Rightarrow x-y=۰ \Rightarrow y=x$$ محور بازتاب

$$(x,y)\rightarrow(x+h,y+k)\Rightarrow ۲(x'-h)-۵(y'-k)-۱۰=۰\Rightarrow$$

۸- الف) انتقال $۲x'-۵y'-۲h+۵k-۱۰=۰\Rightarrow -۲h+۵k-۱۰=۱۰\Rightarrow -۲h+۵k=۲۰$

$$، \; h=۰\Rightarrow k=۴\Rightarrow T(x,y)=(x,y+۴)$$

که بردار انتقال $\vec{v}=(۰,۴)$ است.

ب) بازتاب $\dfrac{|۲x-۵y+۱۰|}{\sqrt{۲^۲+(-۵)^۲}}=\dfrac{|۲x-۵y-۱۰|}{\sqrt{۲^۲+(-۵)^۲}}\Rightarrow ۲x-۵y+۱۰=-۲x+۵y+۱۰\Rightarrow$

که محور بازتاب $۲x-۵y=۰$ می باشد.

پ) چون دو خط موازیند ، هرنقطه دلخواه بر محور بازتاب نقش مرکز دوران و زاویه ۱۸۰° است

پس $۲x-۵y=۰,\ x=۰\Rightarrow y=۰\Rightarrow A=(۰,۰)$ مرکز دوران و $\alpha=۱۸۰^\circ$ زاویه دوران است.

۱- چون $AB \| DC$, $AB = DC$ درانتقال با بردار انتقال AB داریم $A \to B$ و $D \to C$
پس در این انتقال $AD \to BC$ و چون انتقال طول و راستا را حفظ می کند ،
پس $AD = BC$ و $AD \| BC$.

۲- چون این سه پاره خط موازی و مساویند پس در انتقالی با بردار انتقال AD داریم $\begin{cases} A \to D \\ C \to F \\ B \to E \end{cases}$

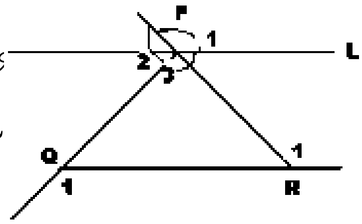
بنابراین $\begin{cases} AC \to DF \\ AB \to DE \\ BC \to EF \end{cases}$ و چون انتقا ل طول را حفظ می کند پس $\begin{cases} AC = DF \\ AB = DE \\ BC = EF \end{cases}$ که نتیجه می شود

دو مثلث به حالت سه ضلع همنهشتند.

۳- از P به موازات QR رسم می کنیم در انتقال به اندازه بردار PR ، QR بر L نگاشته می شود

و PR بر PR وچون انتقال زاویه راحفظ می کند پس $\hat{P}_1 = \hat{R}_1$ به همین ترتیب

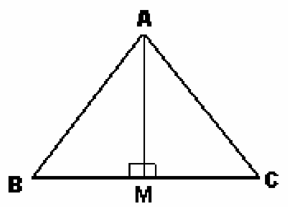
$\hat{Q}_1 = \hat{P}_3$ ولی $\hat{R}_1 + \hat{P}_2 + \hat{Q}_1 = ۳۶۰ \Leftarrow \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_3 = ۳۶۰$.



۴- چون AM عمود منصف BC است ، بنابراین در بازتابی با محور بازتاب AM داریم

$B \to C$ و $A \to A$.پس در این بازتاب $AB \to AC$

امابازتاب طول را حفظ می کند ،در نتیجه $AB = AC$.



۵- مانند مسأله قبل در بازتابی با محور PR ، $R \to R$, $P \to P$, $S \to Q$

بنابراین $S\hat{P}R \to Q\hat{P}R$ ولی بازتاب زاویه را حفظ می کند پس $S\hat{P}R = Q\hat{P}R$.

۶-نیمساز $S\hat{T}R = P\hat{T}Q$ را رسم می کنیم . درمثلث متساوی الساقین نیمسازرأس حکم عمود منصف دارد،

یعنی این نیمساز را می توان محور بازتاب در نظر گرفت. در این بازتاب $\begin{cases} S \to R \\ P \to Q \\ Q \to P \end{cases}$ پس

اما بازتاب $\Delta QPS \to \Delta PQR$ زاویه و طول را حفظ می کند پس $\Delta QPS \cong \Delta PQR$.

۷- الف) قطر AC در مربع نیمسازاست ونیمساز درمثلث متساوی الساقین AEF نقش عمود منصف

رادارد .پس می توان AC را محور بازتاب گرفت که در این بازتاب $E \to F$ و $C \to C$

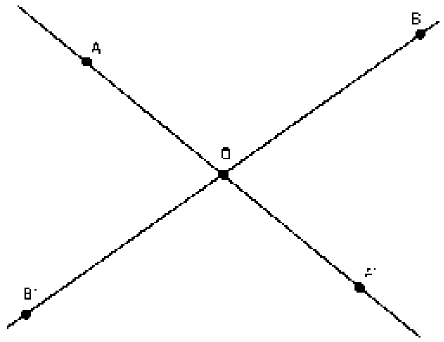
پس $CE \to CF$ ولی در بازتاب طول حفظ می شود بنابرین $CE = CF$.

ب) قطر AC در مربع نیمساز است و نیمساز در مثلثهای متساوی الساقین AEF , ABC نقش

عمود منصف را داشته ومنحصر به فرد است پس می توان AC را محور بازتاب گرفت.

در این بازتاب $\begin{cases} B \to D \\ E \to F \end{cases}$ پس $BE \to DF$ ولی بازتاب طول را حفظ می کند $BE = DF$.

۸- A, A', B, B' را طوری در دو طرف O انتخاب که $OA = OA'$, $OB = OB'$. در دورانی به



مرکز O و زاویه دوران ۱۸۰° داریم $\begin{cases} A \to A' \\ O \to O \\ B \to B' \end{cases}$

پس $A\hat{O}B \to A'\hat{O}B'$

ولی دوران زاویه را حفظ می کند بنابرین $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$.

۹- در دوران به مرکز محل برخورد دو قطر O و زاویه دوران ۱۸۰°داریم $\begin{cases} C \to A \\ A \to C \\ B \to D \end{cases}$.

پس $C\hat{A}D \to A\hat{C}D$ و دوران زاویه را حفظ می کند ، درنتیجه $C\hat{A}D = A\hat{C}D$.

طبق عکس قضیه خطوط موازی $DC \parallel AB$به همین ترتیب $AD \parallel BC$.

بنابراین چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است.

۱۰- عمود منصف های BC و ACهمرا در O قطع می کنند و $B\hat{O}C = C\hat{O}A = ۱۲۰$

$$BH = CH' \,,\, BD = CE \Rightarrow DH = EH'$$

$$\begin{matrix} DH = EH' \\ OH = OH' \\ \hat{H} = \hat{H}' = ۹۰ \end{matrix} \Rightarrow \Delta OEH' \cong \Delta ODH \Rightarrow \begin{cases} OE = OD \\ H\hat{O}D = H'\hat{O}E \end{cases} ①$$

$$H\hat{O}H' = ۱۲۰ \Rightarrow H\hat{O}D + D\hat{O}H' = ۱۲۰ \Rightarrow H'\hat{O}E + D\hat{O}H' = ۱۲۰ \Rightarrow D\hat{O}E = ۱۲۰$$

(و طبق ① می دانیم $OE = OD$)

بنابراین در دوران به مرکز O و زاویه دوران ۱۲۰° ، نقطه D به E نگاشت می شود و Aبه B .

ازطرفی دوران طول را ثابت نگه می دارد و زاویه بین خطوط دوران یافته همان زاویه دوران است.

$$\begin{cases} D \to E \\ A \to B \end{cases} \Rightarrow AD \to BE \Rightarrow AD = BE \,,\, A\hat{F}B = ۱۲۰ \Rightarrow B\hat{F}D = ۱۸۰ - ۱۲۰ = ۶۰ .$$

۱- چون L_1 و L_2 متقاطع اند پس در یک نقطه مشترکند و دو صفحه P_1 و P_2 هم حداقل در یک نقطه (همان نقطه) دارای اشتراکند بنابراین دو صفحه متقاطع اند(در یک خط).

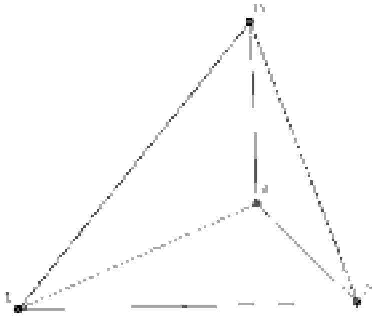
۲- اگر AB,CD متقاطع یا موازی باشند طبق حالات مشخص کردن دو صفحه می توان صفحه ای از آنها در نظر گرفت و بالعکس اگر چهار نقطه A,B,C,D در یک صفحه قرار داشته باشندخطوط گذرنده از AB,CD نمی توانند متنافر باشند. (طبق تعریف خط متنافر)

۳- L_1 و L_2 همرا در A قطع می کنند اگر L_3 هم از A بگذرد در این صورت هر سه در A همرسند. در غیر اینصورت اگر L_3 خط L_1 را در B قطع کند لزوما L_2 را هم در نقطه C متمایز از A,B قطع می کند . از A,B,C متمایز می توان صفحه P را گذراند ، پس A,B,C هم صفحه اند.

٤- از A,B,C یک صفحه منحصر به فرد می گذرد . چون ۴ نقطه هم صفحه نیستند پس D بیرون این صفحه قرار دارد .

جفت خطوط $(AC,BD)(AD,BC)(AB,DC)$

متنافرند وسایر جفت خطوط دیگر متقاطعند.



۵- فصل مشترک دوصفحه P_1 , P_2 را L می نامیم . اگر L صفحه P_3 را در نقطه A قطع کند ، پس هر سه صفحه در نقطه A مشترکند . در غیر اینصورت L با صفحه P_3 موازی است .

در این حالت L نمی تواند با فصل مشترک P_1,P_3 متنافر باشد (چون هم صفحه اند) و یا متقاطع باشد (چون در اینصورت صفحه P_3 را قطع کرده که خلاف فرض موازی بودن آنهاست) .

به همین دلیل L نمی تواند با فصل مشترک P_2,P_3 متنافر و یا متقاطع باشد .

پس سه فصل مشترک با هم موازی اند.

۱- برهان خلف) اگر خط صفحه را قطع کند بنابراین تقاطع خط و صفحه متعلق به هر دو صفحه است ، یعنی دو صفحه دارای نقطه اشتراکند که خلاف فرض است.

بر عکس) دو خط دلخواه متقاطع در صفحه P در نظر گرفته و از نقطه دلخواه روی صفحه دیگر به موازات آنها رسم می کنیم طبق قضیه دو خط اخیر کاملا داخل صفحه P' می افتد. بنابراین دو خط متقاطع از صفحه P با دو خط متقاطع از صفحه P' موازی اند پس طبق تعریف دو صفحه موازیند.

۲- بینهایت خط — بینهایت صفحه

۳- از O بینهایت خط به موازات P می گذرد دو خط متقاطع آن را در نظر گرفته (L_1,L_2) که صفحه ای مانند Q را مشخص می کنند که با صفحه P موازی است.

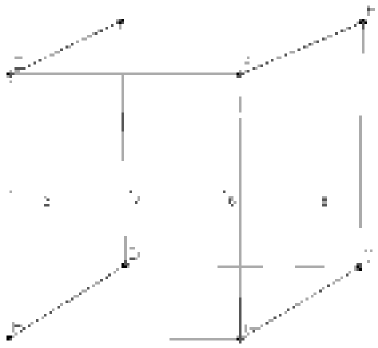
حال اگر خط L موازی صفحه P بوده و بر روی Q نباشد

واز O بگذرد پس L صفحه Qرا قطع می کند ولی چون P,Q موازی اند طبق قضیه L صفحه P را هم قطع می کند که خلاف فرض موازی بودن L با صفحه P است.

٤- برهان خلف) اگرصفحه های P,Q با R موازی باشند و خودشان موازی نباشند پس صفحه P صفحه Q را قطع می کند و چون Q با R موازی است ، طبق قضیه P باید R راقطع کند، که خلاف فرض موازی بودن P,R است.

۵- برهان خلف) اگرصفحه P با خط Lموازی باشد و با خط L' موازی نباشد (که L موازی L' است) یعنی L' صفحه P را قطع می کند و چون $L\|L'$ طبق قضیه L هم صفحه P را قطع می کند ، که خلاف فرض موازی بودن L,L' است.

۶- خلف) اگر خط L با یکی از صفحات موازی P و P' موازی باشد و با دیگری مثلا P' موازی نباشد ، پس P' را قطع می کند ولی چون $P\|P'$ طبق قضیه L صفحه P را هم قطع می کند ، که خلاف فرض موازی بودن L و P است.

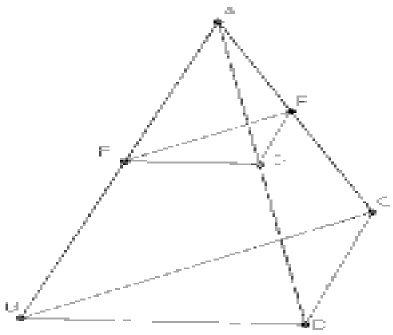


۷- ممکن است خط با خط سوم متنافر باشد مثل خط شامل GF که FB را قطع می کند ولی نسبت به خط شامل AE متنافر است.

۸- در مکعب شکل بالا خطوط AB و CD در دو صفحه موازیند ولی موازی نیستند بلکه متنافرند.

۹- $EF\|BC \Leftarrow$ عکس قضیه تالس در صفحه $\Leftarrow \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{۱}{۲}$ (در صفحه ABC)

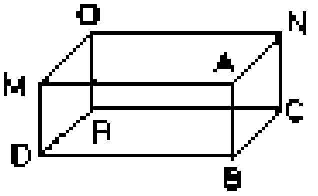
$FG\|CD \Leftarrow$ عکس قضیه تالس در صفحه $\Leftarrow \dfrac{AF}{AC}=\dfrac{AG}{AD}=\dfrac{۱}{۲}$ (در صفحه ACD)



بنابراین دو خط متقاطع EF,FG از صفحه EFG با دو خط متقاطع BC,CD از صفحه BCD موازیند.
پس طبق تعریف صفحه EFG با BCD موازی است.

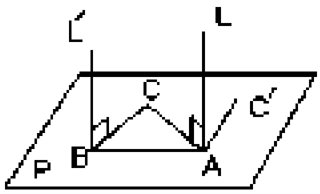
۱۰- $$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\left(\frac{A'B'}{AB}\right)^{۲}=\left(\frac{SA'}{SA}\right)^{۲}=\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۲}=\frac{۱}{۲۵}$$

۱- طبق تعریف مکعب مستطیل که شش وجهی است که وجه های آن مستطیل اند بنابراین یال های کناری بر وجه های قاعده عمودند. پس چون مثلا AB بر BC و BD عمود است طبق تعریف بر صفحه BCD عمود است به همین ترتیب بر صفحه ی AMN نیز عمود است.



و چون $NC \| AB$ و NC خطی از صفحه ی $QNRC$ است،
طبق شرط موازی بودن خط و صفحه AB موازی صفحه $QNRC$ است.
به همین ترتیب موازی صفحه $DQRM$ هم هست.

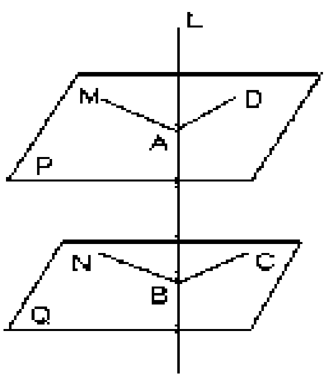
۲- از A درون صفحه ی P به موازات BC رسم می کنیم. L, L' موازیند و L' بر BC عمود است پس L هم بر BC عمود است و BC, AC' موازیند پس L بر AC' هم عمود است و می دانیم L بر AC عمود است پس طبق شرط عمود بودن خط و صفحه خط L برصفحه ی P عمود است اما L, L' موازیند بنابراین L' هم بر صفحه ی P عمود است.



۳-
$$\begin{cases} AB = AC \\ KA = KA \\ KB = KC \end{cases} \Rightarrow K\overset{\Delta}{A}B \cong K\overset{\Delta}{A}C \Rightarrow K\hat{A}B = K\hat{A}C \;, K\hat{A}B = ۹۰$$

$\Rightarrow K\hat{A}C = ۹۰ \Rightarrow KA \perp AC \; (, KA \perp AB) \Rightarrow KA \perp P$ (شرط عمود بودن خط بر صفحه)

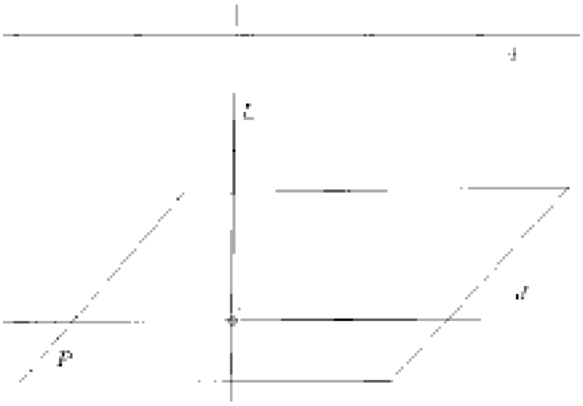
٤- از محل برخورد L باصفحات P, Q (یعنی A, B) دو خط AD, BC وهمچنین AM, BN را با هم موازی رسم می کنیم چون P, Q موازیند، بنابراین این خطوط داخل صفحات P, Q هستند.



$$\begin{cases} L \perp AD \;,\; AD \| BC \Rightarrow L \perp BC \\ L \perp AM \;,\; AM \| NB \Rightarrow L \perp NB \end{cases} \Rightarrow L \perp P$$

(طبق شرط عمود بودن خط و صفحه)

۵- از محل برخورد L با صفحه ی P یعنی A خط d' را به موازات d رسم می کنیم چون d' بر L عمود است و d,d' موازیند ، بنابراین d' هم بر L عمود است . بنابراین d' خطی متعلق به صفحه ی Pاست. (چون L بر صفحه ی P عمود است)
پس dبا خطی از صفحه ی P یعنی d'موازی است
پس $P \| d$ (طبق شرط موازی بودن خط و صفحه) .

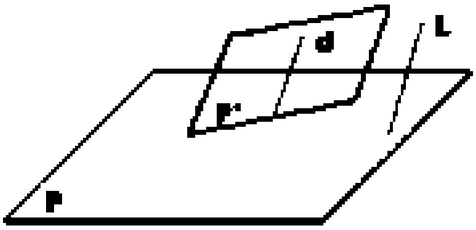


۶- در صفحه ی شامل O,L عمودی بر L رسم می کنیم پای عمود را A می نامیم از این نقطه دو عمود متمایز بر L رسم می کنیم (d',d) چون L بر d',d عمود است ، پس L بر صفحه ی منحصربفرد P شامل d',d عمود است.

۷- از A صفحه ای عمود بر Lرسم می کنیم (P) وهمینطور صفحه ای عمود بر L' به نام (Q)
چون P,Q حد اقل دارای یک نقطه مشترک به نام Aهستند بنابراین دارای فصل مشترکی هستند به نام d که موجود و منحصربفرد است . (چون P,Q موجود و منحصربفردند)

۸- AB برصفحه ی P عمود است پس بر تمام خطوط صفحه مثلا L هم عمود است $(AB \perp L)$
بنابراین طبق فرض L هم بر AB و هم بر BC عمود است بنابراین طبق شرط عمود بودن خط و صفحه L بر صفحه ABC عمود است . پس طبق تعریف بر تمام خطوط صفحه ABC عمود است یعنی $L \perp AC$.

۱- چون P' عمود بر P است پس درون P' حداقل خطی مانند d وجود دارد که بر p عمود است $d \perp P$ و $L \perp P$ بنابرین طبق قضیه $d \| L$ ولی از طرفی d درون صفحه P' است پس طبق شرط موازی بودن خط وصفحه $L \| P'$.



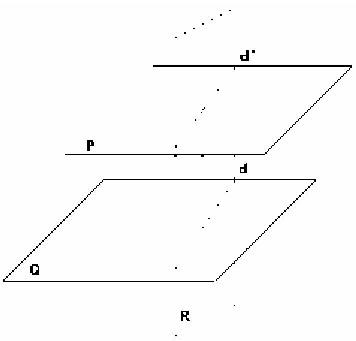
۲- اگر فصل مشترک d باشد. δ را عمود بر P در نظر می گیریم. $\delta \perp P$ و $Q_1 \perp P$ پس طبق مسأله ۱ δ موازی Q_1 است به همین ترتیب δ موازی Q_2 هم هست طبق قضیه ، δ موازی فصل مشترک دو صفحه یعنی d نیز هست. اما δ بر صفحه P عمود است بنابرین موازی آن یعنی d هم بر صفحه P عمود است .

۳- چون P و Q موازیند بنابرین فصل مشترکهای آنها با صفحه R با هم موازیند . $(d \| d')$

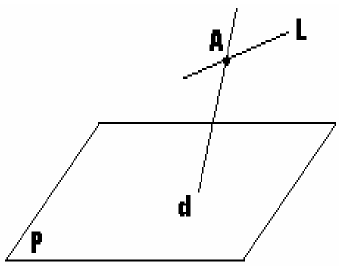
چون R بر P عمود است پس طبق شرط عمود بودن دو صفحه خطی بر R وجود دارد که بر P عمود است . پس بر d' عمود است .

اما d و d' (فصل مشترکها) موازیند. بنابراین بر d هم عمود است .

پس طبق شرط عمود بودن دو صفحه R بر Q هم عمود است .

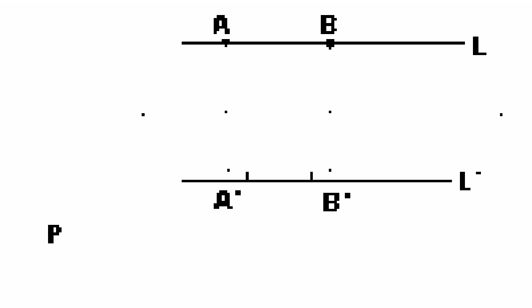


۴- نقطه دلخواه A روی L در نظر می گیریم . از A عمود منحصر به فرد d را بر P رسم می کنیم . از d و L یک و تنها یک صفحه بنام Q می گذرد . چون d متعلق به صفحه Q و بر صفحه P عمود است ، طبق شرط عمود بودن دوصفحه پس P بر Q عمود است .

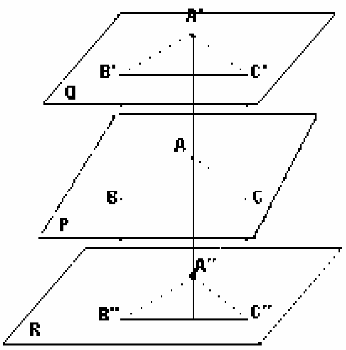


۵- AA' و BB' بر P' عمودند بنابرین با هم موازیند حالا صفحه شامل AA', BB' را Q می نامیم.
چون P و P' موازیند بنابراین $A'B'$ و AB موازی خواهند شد.
(چون این دو فصل مشترک Q با P, P' اند) پس چهار ضلعی $ABB'A'$ مستطیل است .
بنابراین $AA' = BB'$.

۶- مانند مسأله قبل AA' و BB' موازیند چون L با صفحه P موازی است و اشتراک صفحه شامل (AA', BB') با P خط L' است، طبق قضیه $L' || L$. بنابراین $ABB'A'$ مستطیل است پس $AA' = BB'$.



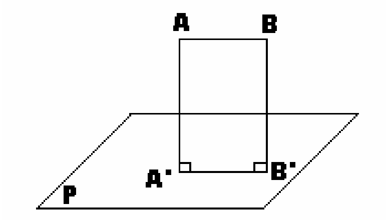
۷- روی صفحه P سه نقطه متمایز A, B, C را در نظر گرفته و سه عمود بر P رسم می کنیم.
در دو طرف P و روی این سه عمود نقاط $A', B', C', A'', B'', C''$ را طوری انتخاب که فاصله آنها تا پای عمود عدد ثابت a باشد .
از A', B', C' صفحه Q و از A'', B'', C'' صفحه R را می گذرانیم .
چون $AA' || BB'$ و $AA' = BB' = a$. پس $AA'BB'$ مستطیل است .
پس $A'B' || AB$ و همین طور $A'C' || AC$ پس طبق شرط موازی بودن دو صفحه $Q || P$.
با استدلالی مشابه داریم $P || R$ وطبق مسائل قبل هرنقطه روی Q و R به فاصله a از P قرار دارد.
حال اگر نقطه ای خارج این دو صفحه به فاصله a از P قرار داشته باشد عمود و یا امتداد عمود صفحه Q و R را قطع می کند محل قطع تا صفحه P هم فاصله a را دارد که این غیر ممکن است .
(دو نقطه در یک طرف نقطه سوم به فاصله a از آن قرار داشته باشند)



۸- ۱) پای عمود را A' و B' بنامید، $AA' \| BB'$ و $AA' = BB'$ پس $ABB'A'$ متوازی الاضلاع است

(بهتر بگوئیم مستطیل) پس $A'B' \| AB$ و $A'B' \in P$

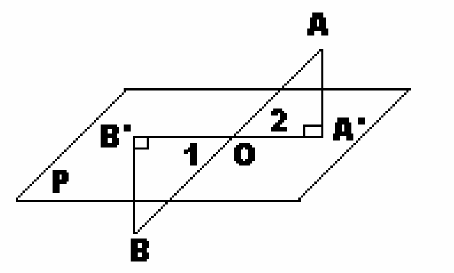
پس طبق شرط موازی بودن خط وصفحه $AB \| P$



۲) پای عمود A' و B' بنامید ، $AA' \| BB'$ پس

در صفحه شامل (AA' , BB') داریم،

(تذکر:محل قطع AB و P را O نامیده و به A', B' وصل کنید)



$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \ , \ \hat{B}' = \hat{A}' = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{A} \quad , \quad \begin{cases} \hat{B} = \hat{A} \\ \hat{A}' = \hat{B}' = ۹۰^\circ \Rightarrow \Delta OAA' \cong \Delta OBB' \Rightarrow OA = OB \\ AA' = BB' \end{cases}$$

یعنی O وسط پاره خط AB است.

۹- الف) با چهار ضلع $B'C'$ و $D'C'$ و DC و BC

ب) عمود مشترک $A'D'$ است و $A'D' = BC = ۱۰$

پ) AC عمود مشترک است و $AC = \sqrt{AB^۲ + BC^۲} = \sqrt{۶^۲ + ۱۰^۲} = \sqrt{۱۳۶} = ۲\sqrt{۳۴}$
