فهرست مطالب :

۱- الف) نتیجه انداختن تاس قطعی است (آمدن عدد ۱) ، بنابراین تصادفی نیست.

ب) نتیجه انداختن این دو تاس غیر قابل پیش بینی و بنابراین تصادفی است.

ج) نوزاد ممکن است در ماه خرداد به دنیا بیاید یا نیاید پس پدیده تصادفی است.

۲- الف) $S=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵,۱۷\}$ ب) $A=\{۳,۹,۱۵\}$ ج) $B=\{۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷\}$

۳- الف) $S=\{GGGG,GGGB,GGBG,GGBB,...,BBBB\}\Rightarrow n(S)=۲^{۴}=۱۶$

ب) $A=\{GGGG,GBGG,BGGG,BBGG\}$ ج) $B=S-\{GGGG\}$

د) $C=\{GGGG,GGGB,GGBG,GBGG,BGGG\}$

$A\cap B=\{GBGG,BGGG,BBGG\}$

ه) $A-C=\{BBGG\}$, $B'=\{GGGG\}$

$A\cap C=\{GGGG,GBGG,BGGG\}\neq\varnothing$

بنابراین A,C سازگارند چون اشتراکشان تهی نیست.

۴- به جز اشتراک A,B ، سایر قسمتهای دو مجموعه را باید علامت زد.

۵- با فرض ارقام متمایز داریم

الف) $S=\{۱۲,۱۴,۱۵,۲۱,۴۱,۵۱,۲۴,۲۵,۴۲,۵۲,۴۵,۵۴\}$

ب) $A=\{۱۲,۲۴,۵۲\}$

ج) $B=\{۱۲,۱۴,۱۵,۲۱,۲۴,۲۵\}$

د) $A\cup B=\{۱۲,۱۴,۱۵,۲۱,۲۴,۲۵,۵۲\}$, $A\cap B=\{۱۲,۲۴\}$

۶- الف) $C=\{۱۲,۱۵,۲۱,۵۱,۲۴,۴۲,۴۵,۵۴\}\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$

ب) $A\cap C=\{۱۲,۲۴\}$, $P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)=\frac{۳}{۱۲}+\frac{۸}{۱۲}-\frac{۲}{۱۲}=\frac{۳}{۴}$

ج) $P(A\cap C')=P(A)-P(A\cap C)=\frac{۳}{۱۲}-\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۱۲}$

۷- الف) $P(A)=\frac{\binom{۱۲}{۳}}{\binom{۱۷}{۳}}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۱۷\times۱۶\times۱۵}=\frac{۱۱}{۳۴}$

ب) $P(B)=\frac{\binom{۱۲}{۲}\times\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۷}{۳}}=\frac{۶\times۱۱\times۵\times۶}{۱۷\times۱۶\times۱۵}=\frac{۳۳}{۶۸}$

ج) $P(C)=\frac{\binom{۱۲}{۳}+\binom{۱۲}{۲}\times\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۷}{۳}}=\frac{۱۱}{۳۴}+\frac{۳۳}{۶۸}=\frac{۵۵}{۶۸}$

۸- الف) $A=\{۲,۳,۵,۷\}\ ,\ S=\{۱,۲,...,۸\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

ب) $B=\{۱,۲,۳,۵,۷,۹\}\ \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$

ج) $C=\{۳,۶\}\ \Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$

$S=\{R۱,R۲,R۳,R۴,R۵,R۶,P۱,P۲,P۳,P۴,P۵,P۶\}$

۱- $A=\{P۲,P۳,P۵\} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$

۲- با جایگذاری $P(A)=\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۹}\times\frac{۴}{۹}=\frac{۱۶}{۲۴۳}$

بدون جایگذاری $P(B)=\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۱}{۱۴}$

۳- $S=\{GGGG,GGGB,GGBG,GGBB,\ldots,BBBB\} \Rightarrow n(S)=۱۶$

الف) (۲پسر) $\rightarrow \frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴}=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$

ب) (۴پسر) یا (۳پسر) یا (۲پسر) $\rightarrow \frac{\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۴}}{۲^۴}=\frac{۶+۴+۱}{۱۶}=\frac{۱۱}{۱۶}$

ج) (۴پسر) یا (۱دختر و ۳پسر) $\rightarrow \frac{\binom{۴}{۴}+\binom{۴}{۳}}{۲^۴}=\frac{۱+۴}{۱۶}=\frac{۵}{۱۶}$

٤- چون پیش آمد روز تولد هر فرد مستقل از دیگری است پس

الف) احتمال آنکه هر پنج نفر شنبه متولد شده باشند برابر $(\frac{۱}{۷})^۵$ پس احتمال آنکه هر پنج نفر در یک روز هفته تولد یافته باشند

$$P(A)=(\frac{۱}{۷})^۵+(\frac{۱}{۷})^۵+(\frac{۱}{۷})^۵+(\frac{۱}{۷})^۵+(\frac{۱}{۷})^۵+(\frac{۱}{۷})^۵+(\frac{۱}{۷})^۵=۷(\frac{۱}{۷})^۵=(\frac{۱}{۷})^۴$$

ب) با فرض سوال نفر اول ۷ انتخاب ، نفر دوم ۶ انتخاب و . . .

$$P(B)=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳}{۷^۵}$$

۵- رنگ چشمها در دو خانواده A, B مستقل از یکدیگرند ، بنابراین

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$
$$=\frac{۲۰}{۱۰۰}+\frac{۷۵}{۱۰۰}-\frac{۲۰}{۱۰۰}\times\frac{۷۵}{۱۰۰}=\frac{۹۵}{۱۰۰}-\frac{۳}{۲۰}=\frac{۸۰}{۱۰۰}=\frac{۴}{۵}$$

۶- الف) هیچ دو مهره همرنگ نباشند یعنی یکی سیاه ، یکی قرمز ، یکی آبی ،

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۳\times۴\times۳}{\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲\times۱}}=\frac{۳۶}{۱۲۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

ب) (حداقل دو مهره همرنگ) متمم (هیچ دو مهره همرنگ نباشند) $P(B)=۱-\frac{۳}{۱۰}=\frac{۷}{۱۰}$

ج) هیچ مهره قرمز نباشد یعنی (سه سیاه) یا (دوسیاه ویک آبی) یا (یک سیاه و دو آبی) یا (سه آبی)

$$P(C)=\frac{\binom{۳}{۳}+\binom{۳}{۲}\times\binom{۳}{۱}+\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۱+۳\times۳+۳\times۳+۱}{\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲\times۱}}=\frac{۲۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۶}$$

۷- چون ناراحتی قلبی پیدا کردن A , B به هم وابسته نیست پس

الف) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=۰/۶\times۰/۷=۰/۴۲$

ب) $P(A'\cup B')=۱-P(A\cap B)=۱-۰/۴۲=۰/۵۸$

۸- الف) فقط سوم $\rightarrow P(A)=\frac{\binom{۷}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۷\times۶\times۵}{۱۲\times۱۱\times۱۰}=\frac{۷}{۴۴}$

ب) (یک نفردوم و دونفرسوم) یا (سه نفرسوم) $\rightarrow P(B)=\frac{\binom{۷}{۳}+\binom{۷}{۲}\times\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۳۵+۱۰۵}{۱۲\times۱۱\times۱۰}=\frac{۷}{۶۶}$

۹- $S=\{(۱,۱),(۱,۲),...(۱,۶),...,(۶,۶)\}\Rightarrow n(S)=۶\times۶=۳۶$

الف) $A=\{(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۲,۵)$
$,(۵,۵),(۶,۵),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۶)\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۱}{۳۶}$

ب) $B=\{(\overbrace{۱,۲,۴,۵}\ ,\ \overbrace{۱,۲,۴,۵})\}\Rightarrow n(B)=۴\times۴=۱۶\Rightarrow P(B)=\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۴}{۹}$

ج) $C=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴)$
$,(۴,۳),(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۱),(۵,۳),(۵,۵)\}$
$\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$

د) $D'=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)\}$
$\Rightarrow P(D')=\frac{n(D')}{n(S)}=\frac{۱۰}{۳۶}\Rightarrow P(D)=۱-\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۲۶}{۳۶}=\frac{۱۳}{۱۸}$

ه) $E=\{(\overbrace{۳,۴,۵,۶}\ ,\ \overbrace{۳,۴,۵,۶})\}\Rightarrow n(E)=۴\times۴=۱۶\Rightarrow P(E)=\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۴}{۹}$

و) $F=\{(۱,۲),(۱,۵),(۲,۱),(۲,۴),(۳,۳)$
$,(۳,۶),(۴,۲),(۴,۵),(۵,۱),(۵,۴),(۶,۳),(۶,۶)\}\Rightarrow P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۳۶}=\frac{۱}{۳}$

۱- الف) $(-۲,۶)$ ب) $[-۴,۰]$ پ) $(۰,۳]$ ت) $[-۳,۵]$

۲-

۳- الف) $(۲,۶]$ ب) $(۱,+\infty)$ پ) $(-\infty,-۲]$ ت) $(-۶,-۱)$

۴- الف) $\{x\in R \mid ۳\le x\le ۷\}$ ب) $\{x\in R \mid x\ge ۰\}$ پ) $\{x\in R \mid x>۰\}$

ت) $\{x\in R \mid -۴\le x<۱\}$ ث) $\{x\in R \mid x\le ۰\}$ ج) $\{x\in R \mid -۳\le x<۲\}$

۵- $A=[-۳,۳]$, $B=(۲,+\infty)$, $C=(-\infty,۰)$

الف) $A\cup B=[-۳,+\infty)$ ب) $A\cap B=(۲,۳]$ پ) $A\cup B\cup C=(-\infty,+\infty)$

ت) $A\cap C=[-۳,۰)$ ث) $B\cap C=\varnothing$ ج) $(A\cup B)\cap C=[-۳,۰)$

چ) $(A\cap B)\cap C=\varnothing$ ح) $B\cup C=(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$

۶- الف) $\{x\in R \mid -۱\le x\le ۳\}$ ب) $(۲,۴)$

پ) $\{x \mid x\in R, -۱\le x<۳\}=[-۱,۳)$ ت) $(-۲,۳]$

۷- الف) $۲x-۳<۰\Rightarrow ۲x<۳\Rightarrow x<\frac{۳}{۲}$

ب) $۲x-۴\ge ۰\Rightarrow ۲x\ge ۴\Rightarrow x\ge ۲$

پ) $\frac{x+۱}{۲}>۲x-۱\Rightarrow x+۱>۴x-۲\Rightarrow -۳x>-۳\Rightarrow x<۱$

ت) $۰\le x+۲<۳\Rightarrow -۲\le x<۳-۲\Rightarrow -۲\le x<۱$

ث) $-۲\le \frac{x}{۲}-۱\le ۲\Rightarrow -۱\le \frac{x}{۲}\le ۳\Rightarrow -۲\le x\le ۶$

ج) $-۱\le \frac{-۲x+۱}{۳}<۴\Rightarrow -۳\le -۲x+۱<۱۲\Rightarrow -۴\le -۲x<۱۱\Rightarrow -\frac{۱۱}{۲}<x\le ۲$

۱) $\frac{۲x+۴}{x+۲}=۱\Rightarrow ۲x+۴=x+۲\Rightarrow x=-۲$

و $x=-۲$ جواب مخرج است پس قابل قبول نیست و $\{\}=$ مجموعه جواب

---

۲) $\frac{x+۵}{۳x+۱۵}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳(x+۵)=۱(۳x+۱۵)\Rightarrow ۰=۰$

چون به تساوی درست رسیدیم پس جواب معادله تمام اعداد حقیقی به جز جواب مخرج است

$۳x+۱۵=۰\Rightarrow x=-۵\Rightarrow$ مجموعه جواب $=R-\{-۵\}$

---

۳) $\frac{۳x-۲}{x}+\frac{۲x+۵}{x+۳}=۵\Rightarrow$ م.م.ک $=x(x+۳)\Rightarrow (x+۳)(۳x-۲)+x(۲x+۵)=۵x(x+۳)$

$۳x^{۲}-۲x+۹x-۶+۲x^{۲}+۵x=۵x^{۲}+۱۵x\Rightarrow -۳x=۶\Rightarrow x=-۲$

و جوابهای مخرج $x=-۳\vee x=۰$ است پس جواب $x=-۲$ قابل قبول است.

---

۴) $\frac{۲x+۳}{۲(x-۱)}-\frac{۵}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۲x-۳}{۲(x+۱)}\Rightarrow$ م.م.ک $=۲(x-۱)(x+۱)$

$\Rightarrow (x+۱)(۲x+۳)+۵(۲)=(۲x-۳)(x+۱)$

$\Rightarrow ۲x^{۲}+۳x+۲x+۳+۱۰=۲x^{۲}+۲x-۳x-۳\Rightarrow ۶x=-۱۸\Rightarrow x=-۳$

و جوابهای مخرج $x=\pm ۱$ است پس جواب $x=-۳$ قابل قبول است.

---

۵) $\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x}=\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x-۲}\Rightarrow \frac{x-(x+۱)}{x(x+۱)}=\frac{x-۲-(x-۱)}{(x-۱)(x-۲)}\Rightarrow \frac{-۱}{x(x+۱)}=\frac{-۱}{(x-۱)(x-۲)}$

$\Rightarrow x(x+۱)=(x-۱)(x-۲)\Rightarrow x^{۲}+x=x^{۲}-۳x+۲\Rightarrow ۴x=۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$

و جوابهای مخرج $x=۲\ \vee\ x=\pm ۱\ \vee\ x=۰$ است پس جواب $x=\frac{۱}{۲}$ قابل قبول است.

---

۶) $\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=3x(\frac{x+1-(x-1)}{x+1})\Rightarrow \frac{4x}{(x-1)(x+1)}=\frac{6x}{(x+1)}\Rightarrow$

$6x(x-1)(x+1)-4x(x+1)=0\Rightarrow 2x(x+1)(3x-5)=0\Rightarrow x=0 \vee x=-1 \vee x=\frac{5}{3}$

و جوابهای مخرج $x=\pm 1$ است پس جوابهای $x=0 \vee x=\frac{5}{3}$ قابل قبول است.

---

۷) $\frac{2x+3}{x-1}-\frac{2x-3}{x+1}=\frac{10}{(x-1)(x+1)}\Rightarrow$ م.م.ک $=(x-1)(x+1)$

$\Rightarrow (2x+3)(x+1)-(2x-3)(x-1)=10$

$\Rightarrow 2x^2+2x+3x+3-2x^2+2x+3x-3=10\Rightarrow 10x=10\Rightarrow x=\frac{10}{10}=1$

و جوابهای مخرج $x=\pm 1$ است پس جواب $x=1$ قابل قبول نیست و $\{\}=$ مجموعه جواب

---

۸) $3(5x^2-x-20)=5(3x^2-3x-28)\Rightarrow 15x^2-3x-60=15x^2-15x-140$

$\Rightarrow -3x+15x=-140+60\Rightarrow 12x=-80\Rightarrow x=-\frac{20}{3}$

اما Δ هردو مخرج کسر ، مجزور کامل نیست پس جواب گویا ندارد بنابراین $x=-\frac{20}{3}$ قابل قبول است.

۹- $x=2\Rightarrow \frac{2}{a-2}+\frac{a-2}{2}=\frac{a}{2}\Rightarrow \frac{2}{a-2}+\frac{a}{2}-1=\frac{a}{2}\Rightarrow \frac{2}{a-2}=1\Rightarrow a-2=2\Rightarrow a=4$

۱۰- $t=-3\Rightarrow \frac{4-(-3)}{2-2(-3)}=\frac{3(-3)^2+k}{((-3)^2+1)^2-68}\Rightarrow \frac{7}{8}=\frac{27+k}{32}\Rightarrow 27+k=28\Rightarrow k=1$

---

۱) $1-\frac{1}{x}-x-1<0 \Rightarrow \frac{-1-x^2}{x}<0\ ,\ -1-x^2<0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow$ مجموعه جواب $=(0,+\infty)$

---

۲) $\frac{6-x^2}{x}-1<0 \Rightarrow \frac{6-x^2-x}{x}<0 \Rightarrow \frac{-(x+3)(x-2)}{x}<0 \Rightarrow P=\frac{(x+3)(x-2)}{x}>0$

$x+3=0 \ \vee\ x-2=0 \ \vee\ x=0 \Rightarrow x=-3 \ \ or \ \ x=2 \ \ or \ \ x=0$

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$(x+3)(x-2)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
P		$-$	0	$+$	ت	$-$	0	$+$	

مجموعه جواب $=(-3,0)\cup(2,+\infty)$

---

۳) $\frac{2x-1}{x}-1>0 \Rightarrow \frac{2x-1-x}{x}>0 \Rightarrow P=\frac{x-1}{x}>0$

$x-1=0 \ \ or \ \ x=0 \Rightarrow x=1 \ \ or \ \ x=0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
P		$+$	ت	$-$	0	$+$	

مجموعه جواب $=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

---

۴) $\frac{x^2-2}{x}-1<0 \Rightarrow \frac{x^2-x-2}{x}<0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x}<0$

$x-2=0 \ \ or \ \ x+1=0 \ \ or \ \ x=0 \Rightarrow x=2 \ \ or \ \ x=-1 \ \ or \ \ x=0$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$(x-2)(x+1)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
P		$-$	0	$+$	ت	$-$	0	$+$	

مجموعه جواب $=(-\infty,-1)\cup(0,2)$

---

۵) $\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}-2\le 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-1)-x(x)-2x(x-1)}{x(x-1)}\le 0$

$$\Rightarrow \frac{x^2-1-x^2-2x^2+2x}{x(x-1)}\le 0 \Rightarrow P=\frac{-2x^2+2x-1}{x(x-1)}\le 0$$

$$-2x^2+2x-1=0\ ,\ \Delta=-4<0\ ,a=-2<0 \Rightarrow -2x^2+2x-1<0$$

$$x(x-1)=0 \Rightarrow x=0\ or\ \ x=1$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-2x^2+2x-1$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$x(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
P		$+$	ت	$-$	ت	$+$	

مجموعه جواب $=(0,1)$

---

۶) $\left|\frac{1-x}{2x-5}\right|>1 \Rightarrow \left(\frac{1-x}{2x-5}\right)^2>1 \Rightarrow \frac{(1-x)^2-(2x-5)^2}{(2x-5)^2}>0$

$$\Rightarrow \frac{(1-x-2x+5)(1-x+2x-5)}{(2x-5)^2}>0 \Rightarrow P=\frac{(-3x+6)(x-4)}{(2x-5)^2}>0$$

$$(-3x+6)(x-4)=0 \Rightarrow x=2\ \ or\ \ x=4$$

$$(2x-5)^2=0 \Rightarrow 2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

x	$-\infty$		2		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
$(-3x+6)(x-4)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$(2x-5)^2$		$+$	‖	$+$	0	$+$	‖	$+$	
P		$-$	0	$+$	ت	$-$	0	$+$	

مجموعه جواب $=(2,\frac{5}{2})\cup(4,+\infty)$

---

۷) $\frac{(x^۲+۱)-(۲x^۲+x+۱)}{(۲x^۲+x+۱)(x^۲+۱)}=\frac{-x^۲-x}{(۲x^۲+x+۱)(x^۲+۱)}\geq ۰ \Rightarrow P=\frac{-x(x+۱)}{(۲x^۲+x+۱)(x^۲+۱)}\geq ۰$

$-x(x+۱)=۰ \Rightarrow x=۰ \ or \ \ x=-۱$

$۲x^۲+x+۱=۰\ ,\ \Delta_۱=-۷<۰\ ,\ a=۲>۰ \Rightarrow ۲x^۲+x+۱>۰$

$x^۲+۱=۰\ ,\ \Delta_۲=-۴<۰\ ,\ a=۱>۰ \Rightarrow x^۲+۱>۰$

x	$-\infty$	-۱	۰	$+\infty$
$-x(x+۱)$	$-$	$+$	$-$	
$۲x^۲+x+۱$	$+$	$+$	$+$	
$x^۲+۱$	$+$	$+$	$+$	
P	$-$	$+$	$-$	

مجموعه جواب $=[-۱,۰]$

---

۸) $۲x-۳-x+۴-\frac{۱}{x-۵}+\frac{۱}{x-۵}<۰ \Rightarrow x+۱<۰ \Rightarrow x<-۱$

مجموعه جواب $=(-\infty,-۱)$

---

۹) $P=\frac{x+۱}{x-۱}\geq ۰\ ,\ \begin{cases} x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \end{cases}$

x	$-\infty$	-۱	۱	$+\infty$
P	$+$	۰	ت	$+$

$A=(-\infty,-۱]\cup(۱,+\infty)$

$Q=\frac{x-۱}{x+۱}\geq ۰\ ,\ \begin{cases} x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \end{cases}$

x	$-\infty$	-۱	۱	$+\infty$
P	$+$	ت	$-$	$+$

$B=(-\infty,-۱)\cup[۱,+\infty)$

مجموعه جواب $=A\cap B=(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$

۱۰) $P=\frac{۱}{x^۲}-\frac{۳}{۴}=\frac{۴-۳x^۲}{۴x^۲}\geq ۰$

$۴-۳x^۲=۰\Rightarrow x^۲=\frac{۴}{۳}\Rightarrow x=\pm\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$, $۴x^۲=۰\Rightarrow x^۲=\frac{۰}{۴}=۰\Rightarrow x=۰$

x	$-\infty$	$-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$	۰	$\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$	$+\infty$
$۴-۳x^۲$	$-$	۰	$+$	۰	$-$
$۴x^۲$	$+$	$+$	۰	$+$	$+$
P	$-$	۰	$+$	۰	$+$

مجموعه جواب $=[-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳},۰)\cup[\frac{۲\sqrt{۳}}{۳},+\infty)$

---

۱۱) $P=\frac{۲x^۲+x-۶}{۳x^۲-۷x-۶}\geq ۰$,
$\begin{cases} ۲x^۲+x-۶=(۲x-۳)(x+۲)=۰\Rightarrow x=\frac{۳}{۲} \ \ or \ \ x=-۲ \\ ۳x^۲-۷x-۶=(۳x+۲)(x-۳)=۰\Rightarrow x=-\frac{۲}{۳} \ \ or \ \ x=۳ \end{cases}$

x	$-\infty$	-۲	$-\frac{۲}{۳}$	$\frac{۳}{۲}$	۳	$+\infty$
$۲x^۲+x-۶$	$+$	۰	$-$	۰	$+$	$+$
$۳x^۲-۷x-۶$	$+$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
P	$+$	۰	$-$	۰	$-$	$+$

$A=(-\infty,-۲]\cup(-\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۲}]\cup(۳,+\infty)$

$Q=۱۶-x^۲\geq ۰$, $۱۶-x^۲=۰\Rightarrow x=\pm ۴$

x	$-\infty$	-۴	۴	$+\infty$
Q	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$B=[-۴,۴]$

مجموعه جواب $A\cap B=[-۴,-۲]\cup(-\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۲}]\cup(۳,+۴]$

۱۲) $S=\frac{۲۰۰t}{t^۲+۱۰۰}>۸\Rightarrow\frac{۲۵t}{t^۲+۱۰۰}-۱>۰\Rightarrow\frac{-(t^۲-۲۵t+۱۰۰)}{t^۲+۱۰۰}>۰\Rightarrow P=\frac{(t-۲۰)(t-۵)}{t^۲+۱۰۰}<۰$

$(t-۲۰)(t-۵)=۰\Rightarrow t=۲۰\ \ or\ \ t=۵$

$t^۲+۱۰۰=۰\ ,\ \Delta=-۴۰۰<۰\ ,\ a=۱>۰\ \Rightarrow t^۲+۱۰۰>۰$

t	$-\infty$	۵	۲۰	$+\infty$
$(t-۲۰)(t-۵)$	+	−	+	
$t^۲+۱۰۰$	+	+	+	
P	+	−	+	

مجموعه جواب برابر $(۵,۲۰)$ است ، یعنی در هفته های ششم تا بیستم پس از تولید چنین خواهد شد.

۱-

$$\cos(۳۰^\circ)=\cos(۲\times ۱۵^\circ)=۲\cos^۲(۱۵^\circ)-۱$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\cos^۲(۱۵^\circ)-۱\Rightarrow \cos^۲(۱۵^\circ)=\frac{\sqrt{۳}+۲}{۴}\Rightarrow \cos(۱۵^\circ)=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$$

$$\sin(۱۵^\circ)=\sqrt{۱-\cos^۲(۱۵^\circ)}=\sqrt{۱-\frac{\sqrt{۳}+۲}{۴}}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}$$

$$\tan(۱۵^\circ)=\frac{\sin(۱۵^\circ)}{\cos(۱۵^\circ)}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}\div\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}=\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}}=۲-\sqrt{۳}$$

$$\cos(۴۵^\circ)=\cos(۲\times ۲۲/۵^\circ)=۲\cos^۲(۲۲/۵^\circ)-۱$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲\cos^۲(۲۲/۵^\circ)-۱\Rightarrow \cos^۲(۲۲/۵^\circ)=\frac{\sqrt{۲}+۲}{۴}\Rightarrow \cos(۲۲/۵^\circ)=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\sin(۲۲/۵^\circ)=\sqrt{۱-\cos^۲(۲۲/۵^\circ)}=\sqrt{۱-\frac{\sqrt{۲}+۲}{۴}}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\tan(۲۲/۵^\circ)=\frac{\sin(۲۲/۵^\circ)}{\cos(۲۲/۵^\circ)}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}\div\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}=\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}\times\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}}}=\frac{۲-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}-۱$$

۲-

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=۱+(\frac{۳}{۴})^۲=۱+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۲۵}{۱۶}\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\times\tan\alpha=\frac{۴}{۵}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۵}$$

$$۱+\tan^۲\beta=\frac{۱}{\cos^۲\beta}\Rightarrow\frac{۱}{\cos^۲\beta}=۱+(\frac{۵}{۱۲})^۲=۱+\frac{۲۵}{۱۴۴}=\frac{۱۶۹}{۱۴۴}\Rightarrow\cos\beta=\sqrt{\frac{۱۴۴}{۱۶۹}}=\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\sin\beta=\cos\beta\times\tan\beta=\frac{۱۲}{۱۳}\times\frac{۵}{۱۲}=\frac{۵}{۱۳}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta=\frac{۳}{۵}\times\frac{۱۲}{۱۳}+\frac{۴}{۵}\times\frac{۵}{۱۳}=\frac{۵۶}{۶۵}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{۱-\sin^۲(\alpha+\beta)}=\sqrt{۱-(\frac{۵۶}{۶۵})^۲}=\frac{۳۳}{۶۵}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{۵۶}{۶۵}\div\frac{۳۳}{۶۵}=\frac{۵۶}{۳۳}$$

۳-

$$\cos\alpha=\sqrt{۱-\sin^{۲}\alpha}=\sqrt{۱-(\frac{۴}{۵})^{۲}}=\frac{۳}{۵}\ ,\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۳}{۵}\div\frac{۴}{۵}=\frac{۳}{۴}$$

$$\cos\beta=-\sqrt{۱-\sin^{۲}\beta}=-\sqrt{۱-(\frac{۱۵}{۱۷})^{۲}}=-\frac{۸}{۱۷}\ ,\ \tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{۱۵}{۱۷}\div-\frac{۸}{۱۷}=-\frac{۱۵}{۸}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta=\frac{۴}{۵}\times\frac{-۸}{۱۷}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۱۵}{۱۷}=\frac{۱۳}{۸۵}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta=\frac{۳}{۵}\times\frac{-۸}{۱۷}-\frac{۴}{۵}\times\frac{۱۵}{۱۷}=-\frac{۸۴}{۸۵}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{۱۳}{۸۵}\div-\frac{۸۴}{۸۵}=-\frac{۱۳}{۸۴}\Rightarrow\cot(\alpha+\beta)=-\frac{۸۴}{۱۳}$$

$$\sin۲\alpha=۲\sin\alpha.\cos\alpha=۲\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\cos۲\alpha=\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha=(\frac{۳}{۵})^{۲}-(\frac{۴}{۵})^{۲}=-\frac{۷}{۲۵}$$

$$\tan۲\beta=\frac{۲\tan\beta}{۱-\tan^{۲}\beta}=\frac{۲(-\frac{۱۵}{۸})}{۱-(-\frac{۱۵}{۸})^{۲}}=\frac{-\frac{۱۵}{۴}}{-\frac{۱۶۱}{۶۴}}=\frac{۲۴۰}{۱۶۱}$$

۴-

$$\sin(x+\frac{\pi}{۳})=\sin x.\cos\frac{\pi}{۳}+\cos x.\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}\sin x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x$$

$$\cos(\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴})=\cos\frac{\pi}{۳}.\cos\frac{\pi}{۴}-\sin\frac{\pi}{۳}.\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{۴}$$

$$\tan(\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan(\frac{\pi}{۶})+\tan(\frac{\pi}{۴})}{۱-\tan(\frac{\pi}{۶}).\tan(\frac{\pi}{۴})}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}+۱}{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳-\sqrt{۳}}=۲+\sqrt{۳}$$

۵- الف) $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=\sin\frac{۳\pi}{۲}.\cos x-\cos\frac{۳\pi}{۲}.\sin x=(-۱)\cos x-(۰)(\sin x=-\cos x$

ب) $\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=\cos\frac{\pi}{۲}.\cos\theta-\sin\frac{\pi}{۲}.\sin\theta=(۰)(\cos\theta)-(۱)(\sin\theta)=-\sin\theta$

ج) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$
$=\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta-(\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta)=۲\sin\alpha.\sin\beta$

د) $\sin ۲x.\cos x-\cos ۲x.\sin x=\sin(۲x-x)=\sin x$

ه) $\sin\alpha=\sin(۲\times\frac{\alpha}{۲})=۲\sin\frac{\alpha}{۲}.\cos\frac{\alpha}{۲}$

و) $\cos\alpha=\cos(۲\times\frac{\alpha}{۲})=۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}-۱$

ز) $۱-\cos\alpha=۱-(۱-۲\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲})=۲\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$

ح) $\tan\alpha=\tan(۲\times\frac{\alpha}{۲})=\frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}}$

ط) $\ldots=\frac{۲}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{۲}{\frac{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha}{\cos\alpha.\sin\alpha}}=\frac{\frac{۲}{۱}}{\frac{۱}{\cos\alpha.\sin\alpha}}=۲\cos\alpha.\sin\alpha=\sin ۲\alpha$

ی) $\frac{\sin x}{۱+\cos x}=\frac{۲\sin\frac{x}{۲}.\cos\frac{x}{۲}}{۱+(۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}-۱)}=\frac{۲\sin\frac{x}{۲}.\cos\frac{x}{۲}}{۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}}=\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}}=\tan\frac{x}{۲}$

ک) $\cot\frac{x}{۲}-\tan\frac{x}{۲}=\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}-\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}}=\frac{\cos^{۲}\frac{x}{۲}-\sin^{۲}\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}.\cos\frac{x}{۲}}=\frac{\cos(۲\times\frac{x}{۲})}{\frac{۱}{۲}\sin(۲\times\frac{x}{۲})}=۲\cot x$

$$f(۰)=\frac{۳}{۲(۰)^۲+۱}=\frac{۳}{۱}=۳ \quad , \quad f(\sqrt{۲})=\frac{۳}{۲(\sqrt{۲})^۲+۱}=\frac{۳}{۵}$$

۱- $$f(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۲(\frac{۱}{۲})^۲+۱}=\frac{۳}{\frac{۲}{۴}+۱}=\frac{۳}{\frac{۳}{۲}}=۲ \quad , \quad f(۲x)=\frac{۳}{۲(۲x)^۲+۱}=\frac{۳}{۸x^۲+۱}$$

۲- $$f(۳)=۳^۲-۴=۹-۴=۵ \quad , \quad f(۵)=۵^۲-۴=۲۱ \quad , \quad f(f(۳))=f(۵)=۲۱$$

۳- $$f(\sqrt{۲}-۱)=\sqrt{۲}-(\sqrt{۲}-۱)=۱ \quad , \quad f(۳-\sqrt{۲})=\sqrt{۲}+(۳-\sqrt{۲})=۳$$
$$f(-\sqrt{۲})=\sqrt{۲}-(-\sqrt{۲})=۲\sqrt{۲} \quad , \quad f(۰)=\sqrt{۲}-۰=\sqrt{۲}$$
$$f(f(-۱))=f(\sqrt{۲}-(-۱))=f(\sqrt{۲}+۱)=\sqrt{۲}+(\sqrt{۲}+۱)=۲\sqrt{۲}+۱$$

٤- ۱) نیست ۲) هست ۳) نیست ۴) هست

۵- $$A(-\frac{۳}{۲},۰), B(۱,۵) \Rightarrow m_{AB}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۵-۰}{۱+\frac{۳}{۲}}=\frac{۵}{\frac{۵}{۲}}=۲$$
$$\Rightarrow y-y_۱=m(x-x_۱) \Rightarrow y-۵=۲(x-۱)=۲x-۲ \Rightarrow y=۲x+۳$$

۶- $$f(۱)=۱^۲+\frac{۱}{۱^۲}=۲ \quad , \quad f(-۱)=(-۱)^۲+\frac{۱}{(-۱)^۲}=۲$$

$$f(\frac{۱}{x})=(\frac{۱}{x})^۲+\frac{۱}{(\frac{۱}{x})^۲}=x^۲+\frac{۱}{x^۲} \quad , \quad f(-\frac{۱}{x})=(-\frac{۱}{x})^۲+\frac{۱}{(-\frac{۱}{x})^۲}=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$$

$$f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^۲+\frac{۱}{(\sqrt{x})}=x+\frac{۱}{x} \ , \ x>۰$$

۷- $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱} \Rightarrow f(-\frac{۱}{x})=\frac{-\frac{۱}{x}-۱}{\frac{-۱}{x}+۱}=\frac{\frac{-(۱+x)}{x}}{\frac{x-۱}{x}}=\frac{۱+x}{-(x-۱)}=\frac{۱+x}{۱-x}$

$\Rightarrow f(x)\times f(\frac{-۱}{x})=\frac{x-۱}{x+۱}\times\frac{۱+x}{۱-x}=-۱$

۸- $C(۰,۳)\ ,\ B(۱,۰)\ ,\ A(۲,۳) \Rightarrow \begin{cases} ۳=a(۰)^۲+b(۰)+c \Rightarrow c=۳ \\ ۰=a(۱)^۲+b(۱)+c \Rightarrow a+b=-۳ \\ ۳=a(۲)^۲+b(۲)+c \Rightarrow ۴a+۲b=۰ \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -a-b=۳ \\ ۲a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow a=+۳ \Rightarrow b=-a-۳=-۶ \Rightarrow f(x)=۳x^۲-۶x+۳=۳(x-۱)^۲$

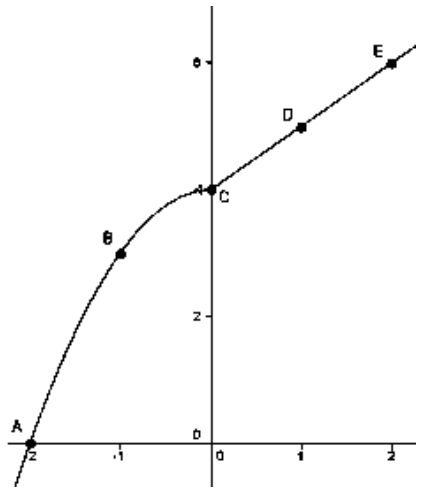
۹- الف) $f(-۲)=۴-(-۲)^۲=۰\ ,\ f(-۱)=۴-(-۱)^۲=۳$

$f(۰)=۰+۴=۴\ ,\ f(۱)=۱+۴=۵$

$f(۲)=۲+۴=۶ \Rightarrow$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۰	۳	۴	۵	۶

ب)



۱۰- $A(۱,۰) \Rightarrow x=۱\ ,\ y=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۰=۱^۲+a(۱)-۳b \Rightarrow a-۳b=-۱ \\ ۰=-۱+b \Rightarrow b=۱ \end{cases}$

$\Rightarrow a-۳(۱)=-۱ \Rightarrow a=۲$

۱۱-

ب)

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۰	۱	۳	۵	۷

الف)

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	-۴	-۳	۵	۶	۷

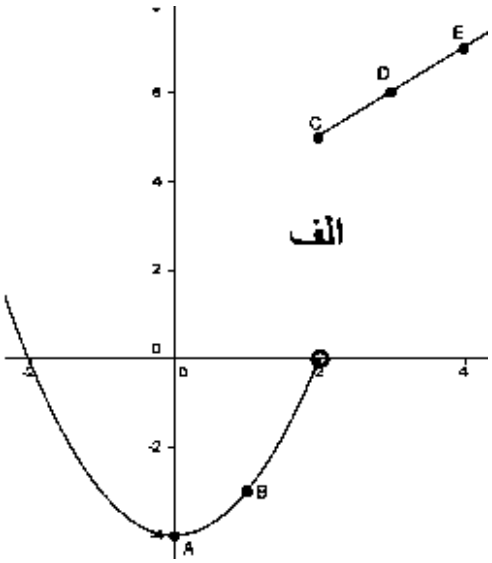
ج)

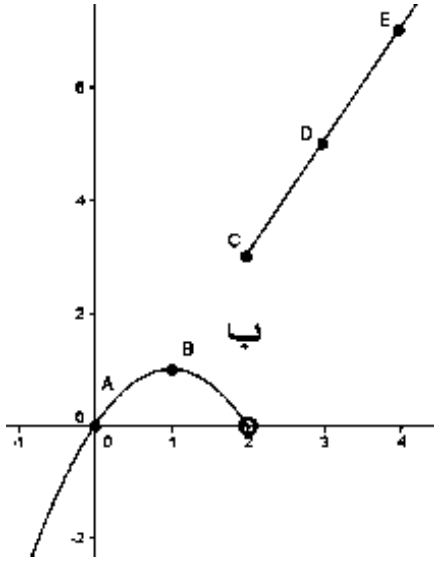
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۱	۱	۱	۲	۵

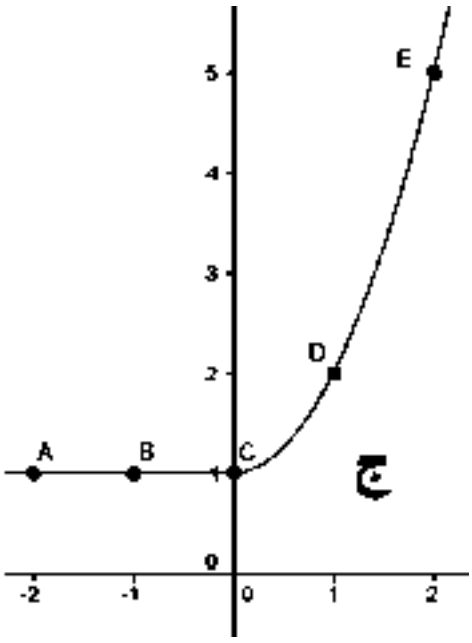
د)

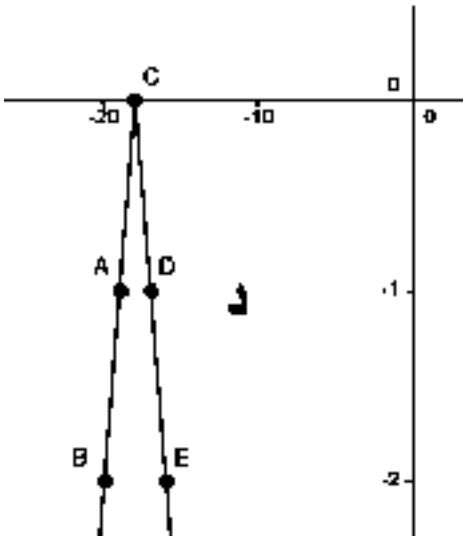
$$y=-۳(\frac{۱}{۳})|x+۱۸|=-|x+۱۸|$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -۲۰ & -۱۹ & -۱۸ & -۱۷ & -۱۶ \\ \hline y & -۲ & -۱ & ۰ & -۱ & -۲ \end{array}$$









۱) $f(x)=۲x^{۲}-۳x \Rightarrow D_f=R$

۲) $g(x)=x(x+۲)(x-۱) \Rightarrow Dg=R$

۳) $h(x)=\dfrac{۱}{x^{۲}-۳x-۴} \Rightarrow D_h: x^{۲}-۳x-۴=۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۱)=۰$

$\Rightarrow x=۴ \quad or \quad x=-۱ \Rightarrow D_h=R-\{۴,-۱\}$

۴) $f(x)=\dfrac{۱}{x}+\dfrac{۲}{x-۱}$ ،$x=۰ \quad or \quad x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow D_f=R-\{۰,۱\}$

۵) $g(x)=\dfrac{۲}{\sqrt{x+۲}} \quad x+۲\rangle ۰ \Rightarrow x\rangle -۲ \Rightarrow D_g=(-۲,+\infty)$

۶) $h(x)=\dfrac{۲x+۵}{x^{۲}-۲x}$ ،$x^{۲}-۲x=۰ \Rightarrow x(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۰ \; or \; x=۲$

$\Rightarrow D_h=(-\infty,۰)\cup(۰,۲)\cup(۲,+\infty)$

۷) $f(x)=\sqrt{\dfrac{۲-x}{۱-x}}$ ، $\dfrac{۲-x}{۱-x}\geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲-x=۰ \Rightarrow x=۲ \\ ۱-x=۰ \Rightarrow x=۱ \end{cases} \Rightarrow D_f=(-\infty,۱)\cup[۲,+\infty)$

۸) $g(x)=\sqrt[۳]{\dfrac{۲}{x+۱}}$ ، $x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow D_g=R-\{-۱\}=(-\infty,-۱)\cup(-۱,+\infty)$

۹) $h(x)=\dfrac{۲x}{\sqrt[۳]{x+۱}}$ ، $x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow D_h=R-\{-۱\}=(-\infty,-۱)\cup(-۱,+\infty)$

۱۰) $f(x)=\log(x^{۲}-۱)$ ، $x^{۲}-۱=۰ \Rightarrow x=\pm ۱ \Rightarrow D_f=(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$

۱۱) $g(x)=\log_x^{۴-x^{۲}}$ ، $۴-x^{۲}>۰$ ، $x>۰$ ،$x\neq ۱ \Rightarrow \{-۲<x<۲\}\cap\{x>۰\}\cap\{x\neq ۱\}$

$\Rightarrow D_g=(۰,۱)\cup(۱,۲)$

۱۲) $h_x=\log(۲-x)^{۲}$ ، $(۲-x)^{۲}>۰ \Rightarrow ۲-x\neq ۰$ ،$D_h=R-\{۲\}$

۱۳) $f(x)=\sqrt{x^{۲}+x-۲}$ ، $x^{۲}+x-۲\geq ۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱)\geq ۰ \Rightarrow x=-۲,۱$

$\Rightarrow \{x\geq ۱\}\cup\{x\leq -۲\} \Rightarrow D_f=(-\infty,-۲]\cup[۱,+\infty)$

۱۴) $g(x)=\frac{|x|}{x}$ ، $x=۰\Rightarrow D_g=R-\{۰\}=(-\infty,۰)\cup(۰,+\infty)$

۱۵) $h(x)=\frac{x^۲-۹}{x-۳}$ ، $x-۳=۰\Rightarrow x=۳\Rightarrow D_h=R-\{۳\}=(-\infty,۳)\cup(۳,+\infty)$

۱۶) $f(x)=x\sqrt{x-۳}$ ، $x-۳\geq ۰\Rightarrow x\geq ۳\Rightarrow D_f=[۳,+\infty)$

۲-

۱) $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{۴})\Rightarrow D_f=R$

۲) $g(x)=\cos(\frac{۱}{x})$ ، $x=۰\Rightarrow D_g=R-\{۰\}$

۳) $h(x)=\cot(۲x)=\frac{\cos ۲x}{\sin ۲x}$ ، $\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}$

$\Rightarrow D_h=R-\left\{\frac{k\pi}{۲}\middle| k\in z\right\}$

۴) $k(x)=\tan(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{\cos(x-\frac{\pi}{۴})}$ ، $\cos(x-\frac{\pi}{۴})=۰\Rightarrow x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}\Rightarrow$

$$\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}\\ x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi-\frac{\pi}{۴}\end{cases}\Rightarrow D_K=R-\left\{۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴},۲k\pi-\frac{\pi}{۴}\middle| k\in z\right\}$$

$$f(x)=\begin{cases}x+۱ & x\geq ۲\\ ۳x & x<۰\end{cases}\Rightarrow D_f=(-\infty,۰)\cup[۲,+\infty)$$

۳-

$$h(x)=\begin{cases}x & -۳<x\leq ۲\\ ۳x-۴ & ۲<x\leq ۴\end{cases}\Rightarrow D_h=(-۳,۴]$$

-۱

$$f(x)=x^{۲}+۲\Rightarrow D_f=R\text{، }\ g(x)=۴x+۲\Rightarrow D_g=R$$

$$\Rightarrow D_{f\pm g}=D_f\cap D_g=R\text{ , }D_{f/g}:۴x+۲=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow D_{f/g}=R-\left\{-\frac{۱}{۲}\right\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\in R\mid ۴x+۲\in R\}=R$$

$$\begin{cases}(f+g)(x)=x^{۲}+۴x+۴\text{ ، }(f-g)(x)=x^{۲}-۴x\\(f.g)(x)=(x^{۲}+۲)(۴x+۲),(f/g)(x)=\dfrac{x^{۲}+۲}{۴x+۲}\\(fog)(x)=f(g(x))=f(۴x+۲)=(۴x+۲)^{۲}+۲=۱۶x^{۲}+۱۶x+۶\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{۲x-۳}{۵}\Rightarrow D_f=R\text{، }g(x)=\frac{x}{x-۱}\Rightarrow Dg=R-\{۱\}$$

$$\Rightarrow D_{f\pm g}=R\cap R-\{۱\}=R-\{۱\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\neq ۱\mid\frac{x}{x-۱}\in R\}=R-\{۱\}$$

$$D_{f/g}:\frac{x}{x-۱}=۰\Rightarrow x=۰$$

$$\Rightarrow D_{f/g}=\{R\cap R-\{۱\}\}-\{۰\}\Rightarrow D_{f/g}=R-\{۰,۱\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(f+g)(x)=\dfrac{۲x-۳}{۵}+\dfrac{x}{x-۱}\text{ ، }(f-g)(x)=\dfrac{۲x-۳}{۵}+\dfrac{x}{x-۱}\\(f/g)(x)=\dfrac{۲x-۳}{۵}\times\dfrac{x-۱}{x}\\(fog)(x)=f(g(x))=f(\dfrac{x}{x-۱})=\dfrac{۲\dfrac{x}{x-۱}-۳}{۵}=\dfrac{-x+۳}{۵(x-۱)}\end{cases}$$

$$f(x)=۲x^{۲}-x \Rightarrow D_f=R \ , \ g(x)=\frac{۱}{x} \Rightarrow D_g=R-\{۰\}$$

$$D_{f\pm g}=D_f \cap D_g=R \cap R-\{۰\}=R-\{۰\}$$

$$D_{f/g}: g(x)=\frac{۱}{x}=۰ \Rightarrow x\in \{\}$$

$$D_{f/g}=D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=۰\}=R-\{۰\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\neq ۰ \mid \frac{۱}{x}\in R\}=R-\{۰\}$$

$$(f\pm g)(x)=(۲x^{۲}-x)\pm\frac{۱}{x} \ , \ (f/g)(x)=\frac{۲x^{۲}-x}{\frac{۱}{x}}=x^{۲}(۲x-۱)$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{۱}{x})=۲(\frac{۱}{x})^{۲}-(\frac{۱}{x})=\frac{۲-x}{x^{۲}}$$

$$f(x)=\sqrt{x-۱} \Rightarrow D_f=[۱,+\infty) \ , \ g(x)=x-۱ \Rightarrow D_g=R$$

$$D_{f\pm g}=D_f \cap D_g=[۱,+\infty) \cap R=[۱,+\infty)$$

$$D_{f/g}: g(x)=x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$$

$$D_{f/g}=D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=۰\}=(۱,+\infty)$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in R \mid x-۱\geq ۱\}=[۲,+\infty)$$

$$(f\pm g)(x)=\sqrt{x-۱}\pm(x-۱)$$

$$(f/g)(x)=\frac{\sqrt{x-۱}}{x-۱}=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x-۱)=\sqrt{x-۱-۱}=\sqrt{x-۲}$$

$$f(x)=\frac{x+۳}{x-۳}\Rightarrow D_f=R-\{۳\}\ ,\ g(x)=\frac{x-۳}{x+۳}\Rightarrow D_g=R-\{-۳\}$$

$$D_{f\pm g}=D_f\cap D_g=R-\{۳\}\cap R-\{-۳\}=R-\{۳,-۳\}$$

$$D_{f/g}:g(x)=\frac{x-۳}{x+۳}=۰\Rightarrow x=۳$$

$$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}=R-\{۳,-۳\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\neq -۳\mid \frac{x-۳}{x+۳}\neq ۳\}=R-\{-۳,-۶\}$$

$$(\ \frac{x-۳}{x+۳}\neq ۳\Rightarrow x-۳\neq ۳x+۹\Rightarrow -۲x\neq ۱۲\Rightarrow x\neq -۶\ )$$

$$(f+g)(x)=\frac{x+۳}{x-۳}+\frac{x-۳}{x+۳}=\frac{۲(x^{۲}+۹)}{x^{۲}-۹}\ ,(f-g)(x)=\frac{x+۳}{x-۳}-\frac{x-۳}{x+۳}=\frac{۱۲x}{x^{۲}-۹}$$

$$(f/g)(x)=\frac{x+۳}{x-۳}\div\frac{x-۳}{x+۳}=(\frac{x+۳}{x-۳})^{۲}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{x-۳}{x+۳})=\frac{\frac{x-۳}{x+۳}+۳}{\frac{x-۳}{x+۳}-۳}=\frac{۴x+۶}{-۲x-۱۲}=-\frac{۲x+۳}{x+۶}$$

$$f(x)=\sin ۲x\ ,\ g(x)=\sin x\Rightarrow D_f=D_g=R\Rightarrow D_{f\pm g}=D_{fog}=R$$

$$D_{f/g}:g(x)=۰\Rightarrow \sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\Rightarrow D_{f/g}=R-\{k\pi\mid k\in Z\}$$

$$(f\pm g)(x)=\sin ۲x\pm\sin x\ ,\ (f/g)(x)=\frac{\sin ۲x}{\sin x}=۲\cos x$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sin x)=\sin(۲\sin x)$$

$$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\ \cos x=۰\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}\Rightarrow D_f=R-\{۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}\mid k\in Z\}$$

$$g(x)=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\ \sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\Rightarrow D_g=R-\{k\pi\mid k\in Z\}$$

$$D_{f\pm g}=D_f\cap D_g=R-\{k\pi,۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}\mid k\in Z\}=R-\{\frac{k\pi}{۲}\mid k\in Z\}$$

$$D_{f/g}:\ g(x)=۰\Rightarrow\cos x=۰\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}$$

$$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}=R-\{\frac{k\pi}{۲}\mid k\in Z\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\neq k\pi\mid\cot x\neq۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}\}=R-\{k\pi\mid k\in Z\}$$

$$(f+g)(x)=\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}\quad,\quad(f-g)(x)=\tan x-\cot x=-۲\cot ۲x$$

$$(f/g)(x)=\tan x/\cot x=\tan^{۲}x\quad,\quad(fog)(x)=f(\cot x)=\tan(\cot x)$$

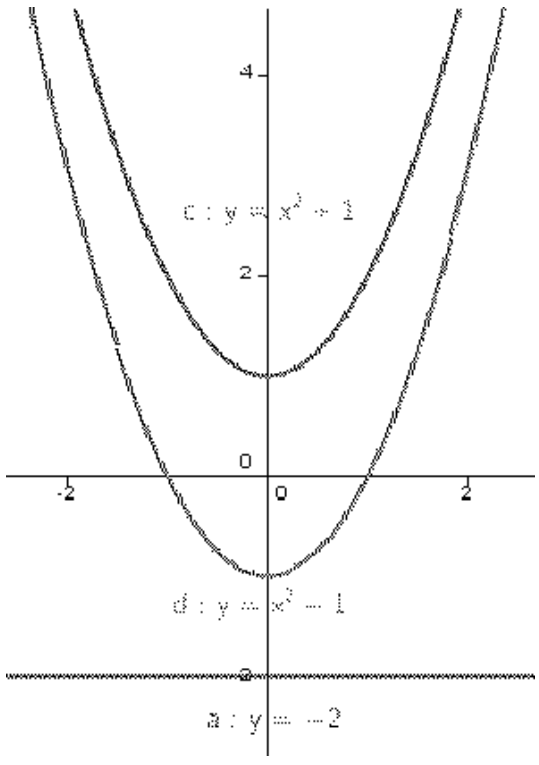
$$(f+g)(x)=-۲+x^{۲}+۱=x^{۲}-۱$$

$$(f-g)(x)=-۲-x^{۲}-۱=-x^{۲}-۳$$

$$(f.g)(x)=-۲\left(x^{۲}+۱\right)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{-۲}{x^{۲}+۱}$$

-۲



۱) $D_f = R\ ,\ D_g = R \Rightarrow D_{fog} = D_{gof} = R$

$(fog)(x) = f\left(x^۲ - ۳\right) = x^۲ - ۳ + ۲ = x^۲ - ۱$

$(gof)(x) = g(x+۲) = (x+۲)^۲ - ۳ = x^۲ + ۴x + ۱$

۲) $D_f = R\ ,\ D_g : ۴x+۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -\frac{۱}{۴}$

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq -\frac{۱}{۴} \mid \sqrt{۴x+۱} \in R\} = \{x \geq -\frac{۱}{۴}\} = [-\frac{۱}{۴}, +\infty)$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in R \mid x^۲ + x \geq -\frac{۱}{۴}\} = R$

$(x^۲ + x \geq -\frac{۱}{۴} \Rightarrow x^۲ + x + \frac{۱}{۴} \geq ۰ \Rightarrow (x + \frac{۱}{۲})^۲ \geq ۰ \Rightarrow x \in R)$

$(fog)(x) = f\left(\sqrt{۴x+۱}\right) = \left(\sqrt{۴x+۱}\right)^۲ + \left(\sqrt{۴x+۱}\right)$

$(gof)(x) = g\left(x^۲ + x\right) = \sqrt{۴\left(x^۲ + x\right) + ۱} = \sqrt{(۲x+۱)^۲} = |۲x+۱|$

۳) $D_f : x+۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow D_f = R - \{-۱\}\ ,\ D_g = R$

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in R \mid ۲x^۲ - x + ۱ \neq -۱\} = R$

$(۲x^۲ - x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = -۱۵ < ۰ \Rightarrow x \in \{\})$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \neq -۱ \mid \frac{x}{x+۱} \in R\} = R - \{-۱\}$

$(fog)_{(x)} = f\left(۲x^۲ - x + ۱\right) = \frac{۲x^۲ - x + ۱}{۲x^۲ - x + ۲}$

$(gof)_{(x)} = g\left(\frac{x}{x+۱}\right) = ۲\left(\frac{x}{x+۱}\right)^۲ - \left(\frac{x}{x+۱}\right) + ۱ = \frac{۲x^۲ + x + ۱}{(x+۱)^۲}$

۴) $D_f = R \ , \ D_g : ۱ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱ \Rightarrow D_g = [-۱,۱]$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-۱,۱] \mid \sqrt{۱ - x^۲} \in R\} = [-۱,۱]$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in R \mid -۱ \leq \cos x \leq ۱\} = R$$

$$(fog)(x) = f\left(\sqrt{۱ - x^۲}\right) = \cos\left(\sqrt{۱ - x^۲}\right)$$

$$(gof)(x) = g(\cos x) = \sqrt{۱ - \cos x^۲} = |\sin x|$$

---

۵) $D_f = D_g = R \Rightarrow D_{fog} = D_{gof} = R$

$$(fog)(x) = f(|x|) = |x^۲| + ۲(|x|) + ۱ = (|x| + ۱)^۲$$

$$(gof)(x) = g(x^۲ + ۲x + ۱) = |(x+۱)^۲| = (x+۱)^۲$$

۶- $(gof)(x) = g(x) = (x+۱)^۲ \ , \ (fog)(x) = f((x+۱)^۲) = (x+۱)^۲$

$$\Rightarrow (gof)(x) - (fog)(x) = (x+۱)^۲ - (x+۱)^۲ = ۰$$

۷- $(fog)(x) = f(ax^۲ + bx + c) = ax^۲ + bx + c + a = x^۲ - ۳x + ۴$

$$\Rightarrow a = ۱ \ , \ b = -۳ \ , \ c + a = ۴ \Rightarrow c + ۱ = ۴ \Rightarrow c = ۳$$

۸- $(gof)(x) = g(f(x)) = g(\tan x) = \sqrt{\frac{۲\tan x}{۱ + \tan x^۲}} = \sqrt{\tan ۲x}$

۹- $(fof)(x) = f\left(\frac{۱}{x}\right) = \frac{۱}{\frac{۱}{x}} = x \ , \ x \neq ۰ \Rightarrow f(f(۳)) = ۳$

۱-

الف)

x	۰	۰/۹	۰/۹۹	۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)=-۲x=۵$	۵	۳/۲	۳/۰۲	?	۲/۹۹۸	۲/۹۸	۲/۸

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۳$$

ب)

x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	۰	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$f(x)=x^۲+x+۳$	۲/۹۱	۲/۹۹۰۱	?	۳/۰۱۰۱	۳/۱۱

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۳$$

پ)

x	$-۱/۱$	$-۱/۰۱$	-۱	$-۰/۹۹$	$-۰/۹$
$f(x)=\dfrac{x^۲-x-۲}{x=۱}$	$-۳/۱$	$-۳/۰۱$	?	$-۲/۹۹$	$-۲/۹$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -۱^-} f(x)=\lim_{x\to -۱^+} f(x)=-۳$$

ت)

x	۲/۹	۲/۹۹	۳	۳/۰۱	۳/۱
$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+۱}-۲}{x-۳}$	۰/۲۵۱	۰/۲۵۰۱	?	۰/۲۴۹	۰/۲۴۸۴

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^+} f(x)=۰/۲۵$$

۲-

x	$-۰/۱$	$-/۰۱$	۰	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+۱}-۱}$	۱/۹۴۸	۱/۹۹۴	?	۲/۰۰۴	۲/۰۴۸

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۲$$

۳) الف) $\lim_{x\to ۱^-}(-x+۲)=\lim_{x\to ۱^+}(-x+۲)=۱\Rightarrow \lim_{x\to ۱}(-x+۲)=۱$

ب) $\lim_{x\to ۱^-}(-x^۲+x+۲)=\lim_{x\to ۱^+}(-x^۲+x+۲)=۲\Rightarrow \lim_{x\to ۱}(-x^۲+x+۲)=۲$

پ) $\lim_{x\to ۱^-}(-x+۲)=\lim_{x\to ۱^+}(-x+۲)=۱\Rightarrow \lim_{x\to ۱}(-x+۲)=۱$

ت) $\lim_{x\to ۱^-}(-x^۲+x+۲)=\lim_{x\to ۱^+}(-x^۲+x+۲)=۲\Rightarrow \lim_{x\to ۱}(-x^۲+x+۲)=۲$

ث) $\lim_{x\to -۲^-}(-x+۱)=۳\ ,\ \lim_{x\to -۲^+}(۲x+۵)=۱\Rightarrow \lim_{x\to -۲} f(x)$ وجود ندارد

ج) $\lim_{x\to ۱^-}(-x^۲+۴)=۳\ ,\ \lim_{x\to ۱^+}(x+۱)=۲\Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x)$ وجود ندارد

الف) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(-۳x+۴)=۱$ ، $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(۲x^۲+x)=۳$

حد چپ و راست برابر نیست بنابراین در $x=۱$ حد موجود نیست.

ب) $\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x+۳}{x-۱}=\frac{۲+۳}{۲-۱}=۵$ ، $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} x^۳+۲=۲^۳+۲=۱۰$

حد چپ و راست برابر نیست بنابراین در $x=۲$ حد موجود نیست.

پ) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}^+} f(x)=\lim_{x\to \frac{۱}{۲}^+}(-۴x^۲+۳)=۲$ ، $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{۱}{۲}^-}(۲x+۱)=۲$

حد چپ و راست برابر است بنابراین در در $x=\frac{۱}{۲}$ حد موجود و برابر ۲ است.

ت) $\lim_{x\to -۲^+} f(x)=\lim_{x\to -۲^+}(x+۱)^۲=۱$ ، $\lim_{x\to -۲^-} f(x)=\lim_{x\to -۲^-}(x+۳)=۱$

حد چپ و راست برابر است بنابراین در $x=-۲$ حد موجود و برابر ۱ است.

ث) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}(۲\sin x-۱)=۱$ ، $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-}(\cos x+۱)=۱$

حد چپ و راست برابر است بنابراین در $x=\frac{\pi}{۲}$ حد موجود و برابر ۱ است.

ج) $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\sqrt{۲x+۱}=۱$ ، $\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(x-۱)=-۱$

حد چپ و راست برابر نیست بنابراین در $x=۰$ حد موجود نیست.

۲- الف) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}(۴x-۵)=۴(\frac{۱}{۲})-۵=۳$ ب) $\lim_{x\to -۱}(\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲})=۴(\frac{۱}{۲})-۵=۳$

پ) $\lim_{x \to ۱}(x^۲ - ۲x - ۳) = (۱)^۲ - ۲(۱) - ۳ = -۴$

ت) $\lim_{x \to ۲}(-۲x^۳ + ۳x^۲ - x + ۴) = -۲(۲)^۳ + ۳(۲)^۲ - (۲) + ۴ = -۲$

ث) $\lim_{x \to ۳}\frac{۳x+۲}{x-۲} = \frac{۳(۳)+۲}{۳-۲} = ۱۱$

ج) $\lim_{x \to ۰}\frac{-x^۲+۱}{x^۲+x+۱} = \frac{-(۰)^۲+۱}{(۰)^۲+(۰)+۱} = ۱$

چ) $\lim_{x \to \sqrt{۲}}\frac{(-۲x^۲+۱)^۳}{x^۲+۱} = \frac{(-۲(\sqrt{۲})^۲+۱)^۳}{(\sqrt{۲})^۲+۱} = -۹$

ح) $\lim_{x \to ۵}\left(\frac{x+۲}{۳x^۲+۴} \times \frac{\sqrt{x-۱}}{x+۱}\right) = \left(\frac{۵+۲}{۳(۵)^۲+۴} \times \frac{\sqrt{۵-۱}}{۵+۱}\right) = \frac{۷}{۲۳۷}$

خ) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۶}}(۲\sin x - ۱) = ۲\sin(\frac{\pi}{۶}) - ۱ = ۰$

د) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۳}}(\cos x + \sin^۲ x + ۱) = \cos\frac{\pi}{۳} + \sin^۲\frac{\pi}{۳} + ۱ = \frac{۹}{۴}$

ذ) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}}(\sin^۲ x + \cos x) = \sin^۲(\frac{\pi}{۴}) + \cos\frac{\pi}{۳} = ۱$

ر) $\lim_{x \to ۰}(\frac{x^۲}{\cos x}) = \frac{۰}{\cos(۰)} = ۱$

ز) $\lim_{x \to \frac{۱}{۲}}(\sin\frac{\pi x}{۲}) = \sin\frac{\pi(\frac{۱}{۲})}{۲} = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ژ) $\lim_{x \to ۴}(\tan\frac{\pi x}{۳}) = \tan(\frac{۴\pi}{۳}) = \tan(\frac{\pi}{۳}) = \sqrt{۳}$

۳-

الف) $\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} x+۳ = ۵$ ، $\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} x+۳ = ۵$

حد چپ و راست برابر است بنابراین حد در $x=۲$ موجود و برابر ۵ است.

ب) $\lim_{x \to -۱^+} f(x) = \lim_{x \to -۱^+} x^۲+۲ = ۳$ ، $\lim_{x \to -۱^-} f(x) = \lim_{x \to -۱^-} -x^۲+۲ = ۱$

حد چپ و راست برابر نیست ، بنابراین در $x=-۱$ حد موجود نیست.

۴-

الف) $\lim_{x \to ۳} f(x) = ۳^۲-۳-۲ = ۴$ ، $\lim_{x \to ۳} g(x) = \frac{۱}{۳-۲} = ۱$

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) = (x^۲ - x - ۲) \pm (\frac{۱}{x-۲})$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x-۲)(x+۱)(\frac{۱}{x-۲}) = x+۱ \ , \ x \neq ۲$$

ب) $(f / g)(x) = f(x) / g(x) = (x-۲)(x+۱) / (\frac{۱}{x-۲}) = (x-۲)^۲(x+۱)$

$\lim_{x \to ۳}(f+g)(x) = ۴+۱ = ۵$ ، $\lim_{x \to ۳}(f-g)(x) = ۴-۱ = ۳$

$\lim_{x \to ۳}(f \times g)(x) = ۳+۱ = ۴$ ، $\lim_{x \to ۳}(f / g)(x) = (۳-۲)^۲(۳+۱) = ۴$

پ) $\lim_{x \to ۳}(f(x))^۳ = ۴^۳ = ۶۴$ ، $\lim_{x \to ۳} \sqrt[۳]{f(x)} = \sqrt[۳]{۴}$ ، $\lim_{x \to ۳} \frac{۱}{g(x)} = ۱$

۵- الف) $۴+(-۳)=۱$　　ب) $۴-(-۳)=۷$　　پ) $(۴)(-۳)=-۱۲$

ت) $\frac{۴}{-۳}=-\frac{۴}{۳}$　　ث) $۲\sqrt{۴}=۴$　　ج) $(-۳)^{۲}=۹$

۶-
$$\lim_{x\to -۲^{+}} f(x)=\lim_{x\to -۲^{+}}(a+۱)x+۳=-۲(a+۱)+۳=-۲a+۱$$
$$\lim_{x\to -۲^{-}} f(x)=\lim_{x\to -۲^{-}}(-۲x^{۲}+۱)=-۲(-۲)^{۲}+۱=-۷$$
$$\lim_{x\to -۲^{+}} f(x)=\lim_{x\to -۲^{-}} f(x)\Rightarrow -۲a+۱=-۷\Rightarrow a=۴$$

۷-
$$\lim_{x\to ۳^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۳^{+}} ax+۲b=۳a+۲b=۶$$
$$\lim_{x\to ۳^{-}} f(x)=\lim_{x\to ۳^{-}} ax^{۲}+bx+۲=۹a+۳b+۲=۲\Rightarrow b=-۳a$$
$$\begin{cases} ۳a+۲b=۶ \\ b=-۳a \end{cases}\Rightarrow ۳a+۲(-۳a)=۶\Rightarrow a=-۲\ ,\ b=۶$$

۸-
$$f(x+۲)=\frac{x+۴}{x}\ ,\ x\to x-۲\Rightarrow f(x-۲+۲)=\frac{x-۲+۴}{x-۲}$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{x+۲}{x-۲}\Rightarrow \lim_{x\to ۳} f(x)=\frac{۳+۲}{۳-۲}=۵$$

۹- الف) ۰　　ب)
$$\frac{۲\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶})+\cos(۲\frac{\pi}{۲})+\sin(\frac{\pi}{۲}\div ۲)}{۲\tan(\frac{\pi}{۲}\div ۲)+\cos^{۲}(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴})}=\frac{\sqrt{۳}+۰+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{۵}$$

۱- الف) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{x}=\lim_{x\to ۰}۳\left(\frac{\sin ۳x}{۳x}\right)=۳\times ۱=۳$　ب) $\lim_{x\to ۰}\frac{۲}{۳x}.\sin\frac{۳x}{۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin\frac{۳x}{۲}}{\frac{۳x}{۲}}=۱$

پ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{۳\sin(۳x-\pi)}{۳x-\pi}=۳\times ۱=۳$　ت) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۵x}{۳x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۵}{۳}\times\frac{\sin ۵x}{۵x}=\frac{۵}{۳}\times ۱=\frac{۵}{۳}$

ث) $\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x.\tan ۳x}{۳x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}\times\frac{\tan ۳x}{۳x}=۱\times ۱=۱$

ج) $\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{(x-a)(x+a)}=\lim_{x\to a}\frac{۱}{x+a}\times\frac{\sin(x-a)}{x-a}=\frac{۱}{a+a}=\frac{۱}{۲a}$

چ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-۱}{۴x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{۴}}{۴x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)}{\cos x.\cos\frac{\pi}{۴}}}{۴\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)}{x-\frac{\pi}{۴}}\times\frac{۱}{۴\cos x.\cos\frac{\pi}{۴}}=\frac{۱}{۴\cos\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۴}}=\frac{۱}{۴\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲}}=\frac{۱}{۲}$

ح) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\frac{۲\sin ۲x}{۲x}\times\frac{۳\sin ۳x}{۳x}=۱\times ۲\times ۳=۶$

خ) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^۳}=\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan x(۱-\cos x)}{x^۳}=\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan x}{x}\times\dfrac{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}{۴\times\frac{x^۲}{۴}}=۱\times\dfrac{۲}{۴}=\dfrac{۱}{۲}$

۲- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰}۲-x^۲=۲-۰^۲=۲\\ \lim\limits_{x\to ۰}۲\cos x=۲\times۱=۲\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to ۰}g(x)=۲$ (طبق قضیهٔ فشردگی)

۳- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{۵-۲x^۲}=\sqrt{۵-۲(۰)^۲}=\sqrt{۵}\\ \lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{۵-x^۲}=\sqrt{۵-۰^۲}=\sqrt{۵}\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to ۰}f(x)=\sqrt{۵}$ (طبق قضیهٔ فشردگی)

۴- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}|x|=\lim\limits_{x\to ۰^+}x=۰\\ \lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}|x|=\lim\limits_{x\to ۰^-}x=۰\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to ۰}|x|=۰$

۱- الف) $\lim_{x\to ۴} \frac{x-۴}{x^۲-۵x+۴} = \lim_{x\to ۴} \frac{x-۴}{(x-۴)(x-۱)} = \lim_{x\to ۴} \frac{۱}{x-۱} = \frac{۱}{۴-۱} = \frac{۱}{۳}$

ب) $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲+۲x-۳}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x+۳)(x-۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} x+۳ = ۴$

پ) $\lim_{x\to -۱} \frac{x^۲-x-۲}{x^۲-۲x-۳} = \lim_{x\to -۱} \frac{(x-۲)(x+۱)}{(x-۳)(x+۱)} = \lim_{x\to -۱} \frac{x-۲}{x-۳} = \frac{-۱-۲}{-۱-۳} = \frac{-۳}{-۴} = \frac{۳}{۴}$

ت) $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۲x+۱}{۲x^۲+x-۳} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x-۱)}{(x-۱)(۲x+۳)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x-۱}{۲x+۳} = \frac{۰}{۵} = ۰$

ث) $\lim_{x\to -۱} \frac{۳x^۳+x^۲+x+۳}{x^۲+۲x+۱} = \lim_{x\to -۱} \frac{(x+۱)\left(۳x^۲-۲x+۳\right)}{(x+۱)(x+۱)} =$

$\lim_{x\to -۱} \frac{۳x^۲-۲x+۳}{x+۱} = \frac{۳(-۱)^۲-۲(-۱)+۳}{-۱+۱} = \frac{۸}{۰}$ تعریف نشده

ج) $\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲-۹}{x^۲-۵x+۶} = \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)}{(x-۲)(x-۳)} = \lim_{x\to ۳} \frac{x+۳}{x-۲} = \frac{۳+۳}{۳-۲} = \frac{۶}{۱} = ۶$

چ) $\lim_{x\to -۲} \frac{۳x^۲-۱۲}{۲-x-x^۲} = \lim_{x\to -۲} \frac{۳\left(x^۲-۴\right)}{-\left(x^۲+x-۲\right)} = \lim_{x\to -۲} \frac{۳(x-۲)(x+۲)}{-(x+۲)(x-۱)}$

$= \lim_{x\to -۲} \frac{۳(x-۲)}{-(x-۱)} = \frac{۳(-۲-۲)}{-(-۲-۱)} = \frac{۳(-۴)}{-(-۳)} = -۴$

ح) $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱}{x^۲ - ۲x + ۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)^۳}{(x-۱)^۲} = \lim_{x\to ۱} (x-۱) = ۱ - ۱ = ۰$

خ) $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۴ - ۲x + ۱}{۲x^۲ - ۳x + ۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)\left(x^۳ + x^۲ + x - ۱\right)}{(x-۱)(۲x-۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۳ + x^۲ + x - ۱}{۲x - ۱}$

$= \frac{۱ + ۱ + ۱ - ۱}{۲ - ۱} = \frac{۲}{۱} = ۲$

د) $\lim_{x\to -۲} \frac{x + \sqrt{x+۶}}{x+۲} = \lim_{x\to -۲} \frac{\left(x + \sqrt{x+۶}\right)\left(x - \sqrt{x+۶}\right)}{(x+۲)\left(x - \sqrt{x+۶}\right)} = \lim_{x\to -۲} \frac{x^۲ - x - ۶}{(x+۲)\left(x - \sqrt{x+۶}\right)}$

$= \lim_{x\to -۲} \frac{(x-۳)(x+۲)}{(x+۲)\left(x - \sqrt{x+۶}\right)} = \lim_{x\to -۲} \frac{(x-۳)}{\left(x - \sqrt{x+۶}\right)} = \frac{-۲ - ۳}{-۲ - \sqrt{-۲+۶}} = \frac{-۵}{-۴} = \frac{۵}{۴}$

ذ) $\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x} - ۲}{۴ - x} \times \frac{\sqrt{x} + ۲}{\sqrt{x} + ۲} = \lim_{x\to ۴} \frac{x - ۴}{-(x-۴)\left(\sqrt{x} + ۲\right)} = \frac{۱}{-\left(\sqrt{۴} + ۲\right)} = -\frac{۱}{۴}$

ر) $\lim_{x\to ۰^+} \frac{x}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to ۰^+} \sqrt{x} = \sqrt{۰} = ۰$

ز) $\lim_{x\to -۵} \frac{x+۵}{\sqrt{۳x+۱۶} - ۱} \times \frac{\sqrt{۳x+۱۶} + ۱}{\sqrt{۳x+۱۶} + ۱} = \lim_{x\to -۵} \frac{(x+۵)\left(\sqrt{۳x+۱۶} + ۱\right)}{۳x + ۱۶ - ۱}$

$= \lim_{x\to -۵} \frac{(x+۵)\left(\sqrt{۳x+۱۶} + ۱\right)}{۳(x+۵)} = \lim_{x\to -۵} \frac{\sqrt{۳x+۱۶} + ۱}{۳} = \frac{\sqrt{۳(-۵)+۱۶} + ۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$

ژ)

$$\lim_{x\to -۲} \frac{۲x+\sqrt{x+۱۸}}{\sqrt{۳x+۷}-۱}\times\frac{۲x-\sqrt{x+۱۸}}{\sqrt{۳x+۷}+۱}\times\frac{\sqrt{۳x+۷}+۱}{۲x-\sqrt{x+۱۸}}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{\left(۴x^{۲}-x-۱۸\right)}{(۳x+۷-۱)}\times\frac{\sqrt{۳x+۷}+۱}{۲x-\sqrt{x+۱۸}}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(۴x-۹)}{۳(x+۲)}\times\frac{\sqrt{۳x+۷}+۱}{۲x-\sqrt{x+۱۸}}=\frac{۴(-۲)-۹}{۳}\times\frac{\sqrt{-۶+۷}+۱}{-۴-\sqrt{-۲+۱۸}}=\frac{۱۷}{۱۲}$$

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{۲x+۳}{x-۱} = \dfrac{۲(۱)+۳}{۱-۱} = \dfrac{۵}{۰^+} = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{۳}{x-۲} = \dfrac{۳}{۰^-} = -\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to -۲^-} \dfrac{۴x}{(x+۲)^۲} = \dfrac{-۸}{۰^+} = -\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to -۱^+} \dfrac{-۱}{(x+۱)^۲} = \dfrac{-۱}{۰^+} = -\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \dfrac{۲x+۳}{(x-۳)^۲} = \dfrac{۹}{۰^+} = +\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{-x+۳}{(x-۲)^۳} = \dfrac{-۲+۳}{۰^-} = \dfrac{۱}{۰^-} = -\infty$

چ) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{۳x+۵}{x^۲-۴} = \dfrac{۳(۲)+۵}{۰^+} = \dfrac{۱۱}{۰^+} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{۳x+۵}{x^۲-۴} = \dfrac{۳(۲)+۵}{۰^-} = \dfrac{۱۱}{۰^-} = -\infty$

ح) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}^+} \dfrac{۴}{۲x-۱} = \dfrac{۴}{۰^+} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}^-} \dfrac{۴}{۲x-۱} = \dfrac{۴}{۰^-} = -\infty$

خ) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{-۱}{x^۴} = \dfrac{-۱}{۰^+} = -\infty$

د) $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{۱}{(x+۱)^۴} = \dfrac{۱}{۰^+} = +\infty$

ذ) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \dfrac{x+۱}{x^۲-۹} = \dfrac{۴}{۰^+} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to ۳^-} \dfrac{x+۱}{x^۲-۹} = \dfrac{۴}{۰^-} = -\infty$

ر) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{-۵x^۲}{x^۲-۱} = \dfrac{-۵(۱)^۲}{۰^+} = \dfrac{-۵}{۰^+} = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{-۵x^۲}{x^۲-۱} = \dfrac{-۵(۱)^۲}{۰^-} = \dfrac{-۵}{۰^-} = +\infty$

ز) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\tan x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin\frac{\pi}{۲}}{\cos\frac{\pi}{۲}}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$

س) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\tan^۲ x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$

ش) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۹}^+}\tan\left(۳x-\frac{\pi}{۳}\right)=\tan\left(۳(\frac{\pi}{۳})-\frac{\pi}{۳}\right)=\tan(۰)=۰$

ص) $\lim\limits_{x\to۰^+}\cot^۳ x=\lim\limits_{x\to۰^+}\frac{\cos^۳ x}{\sin^۳ x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$

ض) $\lim\limits_{x\to۰^-}\frac{۱}{\sin x}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$

ط) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{۱}{\cos x}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$

ظ) $\lim\limits_{x\to۰^+}\frac{۱}{۱-\cos x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$

ع) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۳}^-}\frac{\tan x+\sqrt{۳}}{\tan x-\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۳}}{۰^-}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۰^-}=-\infty$

۱) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -\frac{۱}{۳}x+۴ = -\frac{۱}{۳}\times\pm\infty = \mp\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{۲}{۷}x+۱ = \frac{۲}{۷}\times\pm\infty = \pm\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ۳x^۲-x+۲ = \lim\limits_{x\to\pm\infty} ۳x^۲ = ۳(\pm\infty)^۲ = +\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -۲x^۲-x+۳ = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -۲x^۲ = -۲(\pm\infty)^۲ = -\infty$

۵) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^۳+۲x^۲-۱ = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^۳ = \pm\infty$

۶) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -x^۳+۳x-۲ = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -x^۳ = \mp\infty$

۷) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -(۲x-۱)^۳ = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -۸x^۳ = \mp\infty$

۸) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ۳x^۴+۵x^۲-۱ = \lim\limits_{x\to\pm\infty} ۳x^۴ = +\infty$

۹) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -x^۴+x^۲+۲ = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -x^۴ = -\infty$

۱۰) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^۵-۳x^۳+x-۱ = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^۵ = \pm\infty$

۱۱) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x+۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{x}=۲$

۱۲) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-۳x+۲}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-۳x}{x}=-۳$

۱۳) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-x^{۲}+۲}{۳x^{۲}+۵x+۱}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-x^{۲}}{۳x^{۲}}=-\frac{۱}{۳}$

۱٤) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۴x^{۳}-x^{۲}+۱}{-۲x^{۳}+x-۲}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۴x^{۳}}{-۲x^{۳}}=\frac{۴}{-۲}=-۲$

۱۵) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۱۲x^{n}-x^{۲}+۱}{۶x^{n}+x^{۳}+۲}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۱۲x^{n}}{۶x^{n}}=\frac{۱۲}{۶}=۲$

۱۶) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^{۲}+۵x-۱}{x^{۳}+۷x-۲}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^{۲}}{x^{۳}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۳}{x}=۰$

۱۷) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-۵}{۲x^{۲}x-۱}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{۲x^{۲}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{۲x}=۰$

۱۸) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^{n}-۷x+۲}{۲x^{n+۱}۶x^{n}-۱}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^{n}}{۲x^{n+۱}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۳}{۲x}=۰$

۱۹) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x+۱}{۳}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲}{۳}x=\pm\infty$

۲۰) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۶x^{۲}+x-۲}{۳x-۵}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۶x^{۲}}{۳x}\lim\limits_{x\to\pm\infty}۲x=\pm\infty$

۲۱) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-۳x^۲+۶x-۱}{۲x-۷}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-۳x^۲}{۲x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-۳x}{۲}=\mp\infty$

۲۲) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۳+x-۲}{x+۳}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۳}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}۲x^۲=+\infty$

۲۳) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۴+x^۲-۱}{-x^۲+۵}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۴}{-x^۳}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}-۳x^۲=-\infty$

۲۴) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-۳x^۲+\sqrt{x+۲}}{x^۲+۵x-۱}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲\left(-۳+\sqrt{\frac{۱}{x^۳}+\frac{۲}{x^۴}}\right)}{x^۲\left(۱+\frac{۵}{x}-\frac{۱}{x^۲}\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-۳x^۲}{x^۲}=-۳$

۲۵) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x+۱}{x^۲+\sqrt{x+۲}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(۲+\frac{۱}{x}\right)}{x^۲\left(۱+\sqrt{\frac{۱}{x^۳}+\frac{۲}{x^۴}}\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{x^۲}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲}{x}=۰$

۱-

الف) $f(۲)=۲(۲)^۲-۵(۲)+۱=-۱$,　$\lim_{x\to ۲} f(x)=۲(۲)^۲-۵(۲)+۱=-۱$

بنابراین تابع f در $x=۲$ پیوسته است.

ب) $f(-۲)=\frac{۲(-۲)^۲+(-۲)}{-۲-۲}=\frac{-۳}{۲}$,　$\lim_{x\to -۲} f(x)\frac{۲(-۲)^۲+(-۲)}{-۲-۲}=\frac{۸-۲}{-۴}=\frac{۶}{-۴}=\frac{-۳}{۲}$

بنابراین تابع f در $x=-۲$ پیوسته است.

پ) $f(-۱)=\frac{(-۱)^۲-۱}{(-۱)^۲+۱}=\frac{۰}{۲}=۰$　$\lim_{x\to -۱} f(x)=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}=\frac{(-۱)^۲-۱}{(-۱)^۲+۱}=\frac{۰}{۲}=۰$

بنابراین تابع f در $x=-۱$ پیوسته است.

ت) $f(۳)=\frac{۳+۲}{۲(۳)-۳}=\frac{۵}{۳}$　$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{x+۲}{۲x-۳}=\frac{۵}{۶-۳}=\frac{۵}{۳}$

بنابراین تابع f در $x=۳$ پیوسته است.

ث) $-\frac{۳}{۲}\notin D_F \Rightarrow$ تابع f در $x=-\frac{۳}{۲}$ پیوسته نیست.

ج) $\lim_{x\to -۱^+} f(x)=\lim_{x\to -۱^-}-۳x+۵=۳+۵=۸=f(-۱)=\lim_{x\to -۱^-}۴(x)=\lim_{x\to -۱^-}x^۲+۴=(-۱)^۲+۴=۵$

بنابراین تابع f در $x=-۱$ پیوسته است.

$\lim f(x)=\lim \frac{x+۱}{x-۱}=\frac{۳+۱}{۳-۱}=\frac{۴}{۲}=۲$, $\lim f(x)=\lim ۵x-۱۳=۵(۳)-۱۳=۲$

چ) $x\to ۳^+$ $x\to ۳^+$ $x\to ۳^-$ $x\to ۳^-$

$f(۳)=۲\Rightarrow \lim f(x)=\lim f(x)=f(۳)=۲$

$x\to ۳^+$ $x\to ۳^-$

بنابراین تابع f در $x=۲$ پیوسته است.

ح)

$\lim f(x)=\lim \sqrt{۴x^۲+۱}=\sqrt{۴(۰)^۲+۱}=۱$ $\lim f(x)=\lim(۲x-۱)^۲=(۲(۰)-۱)^۲=۱$

$x\to ۰^+$ $x\to ۰^+$ $x\to ۰^-$ $x\to ۰^-$

$f(۰)=\sqrt{۴(۰)^۲+۱}=۱\Rightarrow \lim f(x)=\lim f(x)=f(۰)=۱$

$x\to ۰^+$ $x\to ۰^-$

بنابراین تابع f در $x=۰$ پیوسته است.

خ) $\lim f(x)=\lim \sin(۲x)=\sin(۲\frac{\pi}{۴})=۱$

$x\to \frac{\pi}{۴}^+$ $x\to \frac{\pi}{۴}^+$

$\lim f(x)=\lim \frac{۱}{۲}+\cos^۲ x=\frac{۱}{۲}+\cos^۲(\frac{\pi}{۴})=۱=f(\frac{\pi}{۴})$

$x\to \frac{\pi}{۴}^-$ $x\to \frac{\pi}{۴}^-$

بنابراین تابع f در $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته است.

ز) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \sin x + \cos x = \sin(\frac{\pi}{۲}) + \cos(\frac{\pi}{۲}) = ۱ = f(\frac{\pi}{۲})$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} ۲\sin^۲ x - ۱ = ۲\sin^۲(\frac{\pi}{۲}) - ۱ = ۱$

بنابراین تابع f در $x=\frac{\pi}{۲}$ پیوسته است.

ح) حد راست یعنی $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ وجود ندارد بنابراین در $x=۱$ حد ندارد پس پیوسته نیست.

(در همسایگی راست $x=۱$ تابع تعریف نشده است)

ط) حد راست یعنی $\lim_{x\to -۲^+} f(x)$ وجود ندارد بنابراین در $x=-۲$ حد ندارد پس پیوسته نیست

(در همسایگی راست $x=-۲$ تابع تعریف نشده است)

۲- $\lim_{x\to -۲^+} f(x) = \lim_{x\to -۲^+} ax+۱ = -۲a+۱$, $\lim_{x\to -۲^-} f(x) = \lim_{x\to -۲^+} ۲ax^۲+bx-۱ = ۸a-۲b-۱$

$f(-۲)=۱۳$, $\lim_{x\to -۲^+} f(x) = \lim_{x\to -۲^+} f(x) = f(-۲)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲a+۱=۱۳ \Rightarrow -۲a=۱۲ \Rightarrow a=-۶ \\ ۸a-۲b-۱=۱۳ \Rightarrow ۸(-۶)-۲b-۱=۱۳ \Rightarrow b=-۳۱ \end{cases}$$

۳- $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱) \Rightarrow -۲(۱)+a = ۱^۲ + ۳(۱) \Rightarrow a = ۱+۳+۲ = ۶$

۱- آهنگ متوسط از ۲ تا ۶ $\frac{f(۶)-f(۲)}{۶-۲}=\frac{(۶^۲+۶(۶)-۷)-(۲^۲+۶(۲)-۷)}{۶-۲}=\frac{۵۶}{۴}=۱۴$

$$\frac{f(۶)-f(۲)}{۶-۲}=\frac{(۶^۲+۶(۶)-۷)-(۲^۲+۶(۲)-۷)}{۶-۲}=\frac{۵۶}{۴}=۱۴$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^۲+۶(x+h)-۷-(x^۲+۶x-۷)}{h}$$

$$=\frac{x^۲+۲xh+h^۲+۶x+۶h-۷-x^۲-۶x+۷}{h}=\frac{h(۲x+h+۶)}{h}=۲x+h$$

$$x_۰=۴\Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{f(۴+h)-f(۴)}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲(۴)+h)=۸$$

$$S(x)=x(x^۲)=x^۳$$

۲- $$\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=\frac{(x+h)^۳-x^۳}{h}=\frac{۳x^۲h+۳xh^۲+h^۳}{h}=۳x^۲+۳xh+h^۲$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}۳x^۲+۳xh+h^۲=۳x^۲$$

$x_۰=۴\Rightarrow ۳(۴)^۲=۴۸=$ آهنگ لحظه ای

$$S(t)=۴\pi(۱۰+۰/۱t)^۲\quad ,\quad \frac{S(۲۰)-S(۰)}{۲۰-۰}=\frac{۴\pi(۱۲)^۲-۴\pi(۱۰)^۲}{۲۰}=\frac{۴\pi(۴۴)}{۲۰}=\frac{۱۱\pi}{۵}$$

۳- $$\frac{S(t+h)-S(t)}{h}=\frac{۴\pi(۱۰+۰/۱(t+h))^۲-۴\pi(۱۰+۰/۱t)^۲}{h}=\frac{۰/۴\pi h(۲۰+۰/۲t+۰/۱h)}{h}$$

$$=۰/۴\pi(۲۰+۰/۲t+۰/۱h)\ \Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{S(t+h)-S(t)}{h}=۰/۴\pi(۲۰+۰/۲t)$$

اگر $t=۱۰$ ، آهنگ لحظه ای برابر است با $۰/۴\pi(۲۰+۰/۲(۱۰))=۸/۸\pi$

۴- $\frac{p(۷)-p(۲)}{۷-۲}=\frac{(۳۰۰۰+۱۰۰(۷)^۲)-(۳۰۰۰+۱۰۰(۲)^۲)}{۵}=\frac{۱۰۰(۷^۲-۲^۲)}{۵}=۹۰۰$

$$\frac{p(t+h)-p(t)}{h}=\frac{(۳۰۰۰+۱۰۰(t+h)^۲)-(۳۰۰۰+۱۰۰t^۲)}{h}=\frac{۱۰۰((t+h)^۲-t^۲)}{h}$$

$$=۱۰۰(h+۲t)\Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{p(t+h)-p(t)}{h}=\lim_{h\to ۰}۱۰۰(h+۲t)=۲۰۰t$$

اگر $t=۳$ ، آهنگ لحظه ای برابر است با $۲۰۰(۳)=۶۰۰$

۵- $V_۲=۱۲۰(۲۵۰۰)-۱۲۰(۲۵۰۰-۵۰t+t^۲)=۱۲۰(۵۰t-t^۲)$ حجم آب تخلیه شده

آهنگ متوسط تخلیه در ۸ دقیقه اول $\frac{V_۲(۸)-V_۲(۰)}{۸-۰}=\frac{۱۲۰(۵۰(۸)-۸^۲)-(۰)}{۸}=۵۰۴۰$

$$\frac{V_۲(t+h)-V_۲(t)}{h}=\frac{۱۲۰(۵۰(t+h)-(t+h)^۲)-۱۲۰(۵۰t-t^۲)}{h}$$

$$=\frac{۱۲۰(۵۰t+۵۰h-t^۲-۲th-h^۲-۵۰t+t^۲)}{h}=\frac{۱۲۰h(۵۰-۲t-h)}{h}=۱۲۰(۵۰-۲t-h)$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{V_۲(t+h)-V_۲(t)}{h}=\lim_{h\to ۰}۱۲۰(۵۰-۲t-h)=۱۲۰(۵۰-۲t)$$

اگر $t=۱۰$ ، آهنگ لحظه ای برابر است با $۱۲۰(۵۰-۲(۱۰))=۳۶۰۰$

۱-
$$f'(۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۳(۲+h)-۱)-(۳(۲)-۱)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۶+۳h-۱-۵}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۳h}{h}=۳$$

۲-
$$f'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{((۱+h)^{۳}+۳(۱+h)^{۲}-۲)-(۱^{۳}+۳(۱)^{۲}-۲)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۱+۳h+۳h^{۲}+h^{۳}+۳+۶h+۳h^{۲}-۲-۲}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۹h+۶h^{۲}+h^{۳}}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۹+۶h+h^{۲})}{h}=\lim_{h\to ۰}۹+۶h+h^{۲}=۹+۶(۰)+(۰)^{۲}=۹$$

۳-
$$f'(-۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{۱-(-۱+h)}-\frac{۱}{۱-(-۱)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲-h}-\frac{۱}{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۲-۲+h}{۲(۲-h)}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{h}{۲(۲-h)}}{\frac{h}{۱}}=\lim_{h\to ۰}\frac{h}{۲h(۲-h)}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{۲(۲-h)}=\frac{۱}{۲(۲-۰)}=\frac{۱}{۴}$$

۴-
$$f'(۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰+h)-f(۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{h}{۱+h}-\frac{۰}{۱+۰}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{h}{۱+h}}{\frac{h}{۱}}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h}{h(۱+h)}=\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{۱+h}=\frac{۱}{۱+۰}=۱$$

$$f'(۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۳+h)-f(-۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲\sqrt{۱-(-۳+h)}-۲\sqrt{۱-(-۳)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲(\sqrt{۴-h}-۲)}{h}\times\frac{(\sqrt{۴-h}+۲)}{(\sqrt{۴-h}+۲)}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۴-h-۴)}{h(\sqrt{۴-h}+۲)}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲(-h)}{h(\sqrt{۴-h}+۲)}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۲}{\sqrt{۴-h}+۲}=\frac{-۲}{\sqrt{۴}+۲}=-\frac{۱}{۲}$$

-۵

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{(a(x+h)^{۲}+b(x+h)+c)-(ax^{۲}+bx+c)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{a((x+h)^{۲}-x^{۲})+b(x+h-x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{a(۲xh+h^{۲})+bh}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۲ax+ah+b)}{h}=\lim_{h\to ۰}۲ax+ah+b=۲ax+b$$

$$\Rightarrow f'(-\frac{b}{۲a})=۲a(-\frac{b}{۲a})+b=-b+b=۰$$

-۶

۱- ۱) $y=\frac{۱}{۳}x^۲-۱\Rightarrow y'=\frac{۲}{۳}x\ ,\ x=۳\Rightarrow m=\frac{۲}{۳}\times ۳=۲$

۲) $y=x^۲\Rightarrow y'=۲x\ \ ,\ \ x=-۱\Rightarrow m=۲(-۱)=-۲$

۳) $y=۳x^۲-۴x\Rightarrow y'=۶x-۴\ ,\ x=-۱\Rightarrow m=۶(-۱)-۴=-۱۰$

۴) $y=x^۲-x\Rightarrow y'=۲x-۱\ ,\ x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow m=۲\left(\frac{۱}{۲}\right)-۱=۱-۱=۰$

۲- $\bar{x}=\frac{x(۴)-x(۱)}{۴-۱}=\frac{(۴^۲-۲(۴)-۱)-\left(۱^۲-۲(۱)-۱\right)}{۳}=\frac{۷+۲}{۳}=\frac{۹}{۳}=۳$

$x'(t)=۲t-۲\Rightarrow x'(۰)=۲(۰)-۲=-۲\ \ ,\ \ x'(۱)=۲(۱)-۲=۰\ \ ,\ \ x'(۳)=۲(۳)-۲=۴$

۳-
$$f'(t)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(-۴/۹(t+h)^۲+۳۰(t+h))-(-۴/۹t^۲+۳۰t)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-۴/۹(t^۲+۲th+h^۲-t^۲)+۳۰(t+h-t)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(-۹/۸t-۴/۹h+۳۰)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}-۹/۸t-۴/۹h+۳۰\Rightarrow f'(t)=-۹/۸t+۳۰$$

$t=۱\Rightarrow f'(۱)=-۹/۸+۳۰=۲۰/۲\ \ ,\ \ t=۳\Rightarrow f'(۳)=-۹/۸(۳)+۳۰=۰/۶$

٤- سرعت متوسط(دوثانیه اول) $\frac{s(۲)-s(۰)}{۲-۰}=\frac{(۱۲(۲)-۳(۲)^۲)-(۱۲(۰)-۳(۰)^۲)}{۲}=\frac{۲۴-۱۲}{۲}=۶$

$$s'(t)=\lim_{h\to ۰}\frac{(۱۲(t+h)-۳(t+h)^۲)-(۱۲t-۳t^۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۱۲-۶t-۳h)}{h}=۱۲-۶t$$

$t=۲\Rightarrow s=۱۲(۲)-۳(۲^۲)=۲۴-۱۲=۱۲\Rightarrow s=۱۲,$

$s'(۴۰)=۱۲-۶(۴)=۱۲-۲۴=-۱۲$

توپ با سرعت ۱۲ واحد در حال بازگشت به زمین است.

---

۱) $f'(x)=۰$ ۲) $f'(x)=۷$ ۳) $f'(x)=۳x^{۲}+۶x+۷$

۴) $f'(x)=-۵+۸x$ ۵) $f'(x)=۳-۱۲x^{۲}$ ۶) $f'(x)=-\frac{۵}{۳}+۲x$

۷) $f'(x)=x^{۲}+x+۱$ ۸) $f'(x)=۶(۱+۳x)$ ۹) $f'(x)=a_{۱}$

۱۰) $f'(x)=a_{۱}+۲a_{۲}x$ ۱۱) $f'(x)=a_{۱}+۲a_{۲}x+۳a_{۲}x^{۲}$

۱۲) $f'(x)=x+۹x^{۲}+۱۲x+۴\Rightarrow f'(x)=۱+۱۸x+۱۲=۱۸x+۱۳$

۱۳) $f'(x)=۲(۳x-۷)+۳(۲x+۳)=۶x-۱۴+۶x+۹=۱۲x-۵$

۱۴) $f'(x)=(۳x^{۲}-۱)(x-۹)+۱(x^{۳}-x)=۳x^{۳}-۲۷x^{۲}-x+۹+x^{۳}-x=۴x^{۳}-۲۷x^{۲}-۲x+۹$

۱۵) $f'(x)=۱(\frac{x^{۲}}{۲}+x)+(x+۱)(x+۱)=\frac{x^{۲}}{۲}+x+x^{۲}+۲x+۱=\frac{۳x^{۲}}{۲}+۳x+۱$

۱۶) $f'(x)=۵(۱-\frac{x}{۲})-\frac{۱}{۲}(۵x-۴)=۵-\frac{۵x}{۲}-\frac{۵x}{۲}+۲=۷-۵x$

۱۷) $f(x)=۳x^{۴}-۲x^{۳}\Rightarrow f'(x)=۱۲x^{۳}-۶x^{۲}$

۱۸) $f(x)=(x^{۲}+۱)(۳x^{۲}+۶x)\Rightarrow f'(x)=۲x(۳x^{۲}+۶x)+(۶x+۶)(x^{۲}+۱)$

$=۶x^{۳}+۱۲x^{۲}+۶x^{۳}+۶x+۶x^{۲}+۶=۱۲x^{۳}+۱۸x^{۲}+۶x+۶$

۱) $f'(x)=\frac{۱(x+۱)-۱(x-۱)}{(x+۱)^{۲}}=\frac{x+۱-x+۱}{(x+۱)^{۲}}=\frac{۲}{(x+۱)^{۲}}$, $D_{f'}=R-\{-۱\}$

۲) $f(x)=\frac{x}{x^{۲}+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱\left(x^{۲}+۱\right)-۲x(x)}{\left(x^{۲}+۱\right)^{۲}}=\frac{x^{۲}+۱-۲x^{۲}}{\left(x^{۲}+۱\right)^{۲}}=\frac{-x^{۲}+۱}{\left(x^{۲}+۱\right)^{۲}}$, $D_{f'}=R$

۳) $f'(x)=\frac{۲(۳x+۵)-۳(۲x-۳)}{(۳x+۵)^{۲}}=\frac{۶x+۱۰-۶x+۹}{(۳x+۵)^{۲}}=\frac{۱۹}{(۳x+۵)^{۲}}$, $D_{f'}=R-\{-\frac{۵}{۳}\}$

۴) $f(x)=\frac{۳(۲x+۵)^{۲}}{x^{۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱۲(۲x+۵)x^{۳}-۹x^{۲}(۲x+۵)^{۲}}{x^{۶}}$

$=\frac{۳\ (۲x+۵)(۴x^{۳}-۶x^{۳}-۱۵x^{۲})}{x^{۶}}=\frac{۳\ (۲x+۵)(-۲x^{۳}-۱۵x^{۲})}{x^{۶}}$

$=\frac{-۳\ (۲x+۵)(۲x+۱۵)}{x^{۴}}$, $D_{f'}=R-\{۰\}$

۵) $f(x)=\frac{۴}{(x-۱)^{۳}}=۴(x-۱)^{-۳}\Rightarrow f'(x)=-۱۲(x-۱)^{-۴}=\frac{-۱۲}{(x-۱)^{۴}}$, $D_{f'}=R-\{۱\}$

۶) $f(x)=\frac{(x+۱)}{x(x-۱)}=\frac{x+۱}{x^{۲}-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱(x^{۲}-x)-(۲x-۱)(x+۱)}{(x^{۲}-۲x)^{۲}}$

$=\frac{x^{۲}-x-۲x^{۲}-۲x+x+۱}{x^{۲}(x-۱)^{۲}}=\frac{-x^{۲}-۲x+۱}{x^{۲}(x-۱)^{۲}}$, $D_{f'}=R-\{۰,۱\}$

۷) $f(x)=\frac{x^{۳}-۱}{x^{۳}+۱} \Rightarrow f'(x)=\frac{۳x^{۲}(x^{۳}+۱)-۳x^{۲}(x^{۳}-۱)}{(x^{۳}+۱)^{۲}}=\frac{۶x^{۲}}{(x^{۳}+۱)^{۲}}$, $D_{f'}=R-\{-۱\}$

۸) $f(x)=(x^{۲}+x-۲)^{-۱} \Rightarrow f'(x)=-(۲x+۱)(x^{۲}+x-۲)^{-۲}=\frac{-(۲x+۱)}{(x^{۲}+x-۲)^{۲}}$

$D_{f'}: x^{۲}+x-۲=۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow x=-۲,۱ \Rightarrow D_{f'}=R-\{-۲,۱\}$

۹) $f(x)=\left(\frac{x-۱}{۳-x}\right)^{۲} \Rightarrow f'(x)=۲\left(\frac{x-۱}{۳-x}\right)\left(\frac{۳-x+x-۱}{(۳-x)^{۲}}\right)=\frac{۴(x-۱)}{(۳-x)^{۳}}$

$D_{f'}: ۳-x=۰ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow D_{f'}=R-\{۳\}$

۱۰) $f(x)=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{x}}=\frac{x}{x+۱}$, $x\neq ۰,-۱ \Rightarrow f'(x)=\frac{x+۱-x}{(x+۱)^{۲}}=\frac{۱}{(x+۱)^{۲}}$, $D_{f'}=R-\{۰,-۱\}$

۱۱) $f(x)=(۲x+۳)^{۴} \Rightarrow f'(x)=۸(۲x+۳)^{۳}$, $D_{f'}=R$

۱۲) $f(x)=(۵x^{۲}-۲)^{۳} \Rightarrow f'(x)=۳(۱۰x)(۵x^{۲}-۲)^{۲}=۳۰x(۵x^{۲}-۲)^{۲}$, $D_{f'}=R$

۱۳) $f(x)=\sqrt{۳x-۲} \Rightarrow f'(x)=\frac{۳}{۲(\sqrt{۳x-۲})}$

$D_{f'}: ۳x-۲>۰ \Rightarrow x>\frac{۲}{۳} \Rightarrow D_{f'}=(\frac{۲}{۳},+\infty)$

۱۴) $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۴} \Rightarrow f'(x)=\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۴}}=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۴}}$, $x^{۲}+۴=۰ \Rightarrow x\in\{\} \Rightarrow D_{f'}=R$

۱۵) $f(x)=\sqrt{۴-x^۲} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۲x}{۲\sqrt{۴-x^۲}}=\frac{-x}{\sqrt{۴-x^۲}}$

$۴-x^۲>۰ \Rightarrow -۲<x<۲ \Rightarrow D_{f'}=(-۲,۲)$

۱۶) $f(x)=\sqrt{x(x-۲)}=\sqrt{x^۲-۲x} \Rightarrow f'(x)=\frac{۲x-۲}{۲\sqrt{x^۲-۲x}}=\frac{x-۱}{\sqrt{x^۲-۲x}}$

$x^۲-۲x>۰ \Rightarrow x>۲ \quad or \quad x<۰ \Rightarrow D_{f'}=(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$

۱۷) $f(x)=\frac{۱}{۱+\sqrt{x}}=(۱+\sqrt{x})^{-۱} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{۲\sqrt{x}}(۱+\sqrt{x})^{-۲}=\frac{-۱}{۲\sqrt{x}(۱+\sqrt{x})^۲}$

$x>۰ \Rightarrow D_{f'}=(۰,+\infty)$

۱۸) $f(x)=(۱+\sqrt{x})^۳ \Rightarrow f'(x)=۳\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)(۱+\sqrt{x})^۲=\frac{۳}{۲\sqrt{x}}(۱+\sqrt{x})^۲$

$x>۰ \Rightarrow D_{f'}=(۰,+\infty)$

۱۹) $f(x)=\frac{x}{x+\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{x+\sqrt{x}-x\left(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)}{(x+\sqrt{x})^۲}=\frac{x+\sqrt{x}-x-\frac{\sqrt{x}}{۲}}{(x+\sqrt{x})^۲}$

$=\frac{\sqrt{x}}{۲(x+\sqrt{x})^۲} \quad , \quad x>۰ \Rightarrow D_{f'}=(۰,+\infty)$

۲۰) $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲x+۱}}=(\sqrt{۲x+۱})^{-۱} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۲}{۲\sqrt{۲x+۱}}(\sqrt{۲x+۱})^{-۲}=\frac{-۱}{\sqrt{۲x+۱}(۲x+۱)}$

$۲x+۱>۰ \Rightarrow x>-\frac{۱}{۲} \Rightarrow D_{f'}=(-\frac{۱}{۲},+\infty)$

۱) $y = \sin x - \cos x \Rightarrow y' = \cos x + \sin x$

۲) $y = ۳\cos x.\sin ۲x \Rightarrow y' = -۳\sin x \sin ۲x + ۶\cos x \cos ۲x$

$x = \pi \Rightarrow y' = -۳(۰)(۰) + ۶(-۱)(۱) = -۶$

۳) $y = ۳\sin^۲ x + ۲\cos^۳ x \Rightarrow y' = ۶\sin x \cos x - ۶\cos^۲ x \sin x$

۴) $y = (\sin x + \cos x)^۲ \Rightarrow y' = ۲(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)$

$x = \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow y' = ۲(-۱ + ۰)(۰ - (-۱)) = -۲$

۵) $y = \sin\left(\frac{-x}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) + \cos\frac{x}{۲} \Rightarrow y' = -\frac{۱}{۲}\cos\left(-\frac{x}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) - \frac{۱}{۲}\sin\frac{x}{۲}$

۶) $y = \sin x \cos ۳x \Rightarrow y' = \cos x.\cos ۳x - ۳\sin x.\sin ۳x$

$x = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow y' = \frac{۱}{۲}(-۱) - ۳(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(۰) = -\frac{۱}{۲}$

۷) $y = \frac{۱}{\cos x + \sin x} = (\cos x + \sin x)^{-۱} \Rightarrow y' = -(-\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)^{-۲}$

$= \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^۲}$

۸) $y = \frac{\sin^۲ x}{۱ + \cos^۲ x} \Rightarrow y' = \frac{۲\sin x \cos x(۱ + \cos^۲ x) + ۲\sin x \cos x(\sin^۲ x)}{(۱ + \cos^۲ x)^۲}$

$= \frac{\sin ۲x(۱ + \cos^۲ x + \sin^۲ x)}{(۱ + \cos^۲ x)^۲} = \frac{۲\sin ۲x}{(۱ + \cos^۲ x)^۲}$ ، $x = ۰ \Rightarrow y' = \frac{۲\sin ۰}{(۱ + \cos ۰)^۲} = ۰$

۹) $y = ۲\cos^{۲}\left(\frac{\pi}{۶} - \frac{x}{۴}\right) \Rightarrow y' = ۲\left(-\frac{۱}{۴}\right)\left(-\sin\left(\frac{\pi}{۶} - \frac{x}{۴}\right)\right)\left(۲\cos\left(\frac{\pi}{۶} - \frac{x}{۴}\right)\right) = \frac{۱}{۲}\sin\left(\frac{\pi}{۳} - \frac{x}{۲}\right)$

۱۰) $y = x + \sin(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = ۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})$

$$x = \pi^{۲} \Rightarrow y' = ۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{\pi^{۲}}}\cos(\sqrt{\pi^{۲}}) = ۱ + \frac{۱}{۲\pi}(-۱) = \frac{۲\pi - ۱}{۲\pi}$$

۱۱) $y = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

$$\Rightarrow y' = \frac{(-\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) - (-\sin x - \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)^{۲}}$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)^{۲} + (\cos x + \sin x)^{۲}}{(\cos x - \sin x)^{۲}} = \frac{۲}{(\cos x - \sin x)^{۲}}$$

۱۲) $y = \sin x \tan x \Rightarrow y' = \cos x \tan x + \sin x\left(۱ + \tan^{۲} x\right) = \sin x\left(۲ + \tan^{۲} x\right)$

$$x = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow y' = \sin\frac{\pi}{۴}\left(۲ + \tan^{۲}\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(۲ + ۱) = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۳) $y = \tan^{۲} x - ۲\cot x \Rightarrow y' = ۲\tan x\left(۱ + \tan^{۲} x\right) + ۲\left(۱ + \cot^{۲} x\right)$

۱۴) $y=\dfrac{۱-\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan\frac{x}{۲}}\Rightarrow y'=\dfrac{-\frac{۱}{۲}\left(۱+\tan^{۲}\frac{x}{۲}\right)\left(۱+\tan\frac{x}{۲}\right)-\frac{۱}{۲}\left(۱+\tan^{۲}\frac{x}{۲}\right)\left(۱-\tan\frac{x}{۲}\right)}{\left(۱+\tan\frac{x}{۲}\right)^{۲}}$

$$=\frac{-\left(۱+\tan^{۲}\frac{x}{۲}\right)}{\left(۱+\tan\frac{x}{۲}\right)^{۲}}\ ,\quad x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow y'=\frac{-\left(۱+\tan^{۲}\frac{\pi}{۴}\right)}{\left(۱+\tan\frac{\pi}{۴}\right)^{۲}}=\frac{-۲}{۴}=\frac{-۱}{۲}$$

۱۵) $y=\sqrt{۱+\sin x}\Rightarrow y'=\dfrac{\cos x}{۲\sqrt{۱+\sin x}}$

۱۶) $y=\dfrac{\sin x}{۱+x}\Rightarrow y'=\dfrac{\cos x(۱+x)-\sin x}{(۱+x)^{۲}}\quad ,x=۰\Rightarrow y'=\dfrac{\cos(۰)(۱+۰)-\sin ۰}{(۱+۰)^{۲}}=\dfrac{۱}{۱}=۱$

۱۷) $y=\sin^{۳}\sqrt{t}\Rightarrow y'=\dfrac{۱}{۲\sqrt{t}}\times\cos\sqrt{t}\times۳\sin^{۲}\sqrt{t}=\dfrac{۳}{۲\sqrt{t}}\cos\sqrt{t}.\sin^{۲}\sqrt{t}$

۱۸) $y=\sin\omega t+\cos\omega t\Rightarrow y'=\omega\cos\omega t-\omega\sin\omega t\ ,\ t=\dfrac{\pi}{۲\omega}\Rightarrow$

$$y'=\omega\cos\omega\left(\frac{\pi}{۲\omega}\right)-\omega\sin\omega\left(\frac{\pi}{۲\omega}\right)=\omega\times۰-\omega\times۱=-\omega$$