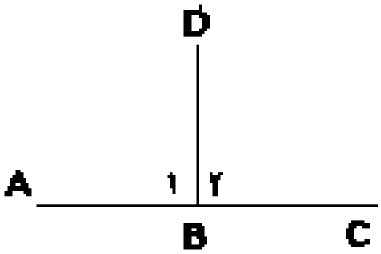
فهرست مطالب :

۱- $\begin{cases}\hat{B}_{۱}=\hat{B}_{۲}\\ \hat{B}_{۱}+\hat{B}_{۲}=۱۸۰^\circ\end{cases}\Rightarrow \quad ۲\hat{B}_{۱}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \hat{B}_{۱}=۹۰^\circ$



۲- اضلاع مربع $QP=PS$

متساوی الساقین ΔQPT ⇐ $PS=PT\Rightarrow QP=PT$ اضلاع مثلث متساوی الاضلاع

۳- متساوی الساقین

$\Delta XKJ:\ KX=KJ$ متساوی الاضلاع

$KJML:\ KJ=KL\ \Rightarrow KX=KY\Rightarrow \Delta KXY$ مربع

$\Delta KLY:\ KL=KY$ متساوی الاضلاع

٤- دو زاویه $\angle LKM$, $\angle RQS$ مکمل زوایای $\angle LKI$, $\angle RQP$ هستند و طبق ق زوایای مکمل با هم برابرند.

٥- $x+y=۹۰^\circ\Rightarrow(۱۸۰^\circ-x)+(۱۸۰^\circ-y)=۳۶۰^\circ-(x+y)=۳۶۰^\circ-۹۰^\circ=۲۷۰^\circ$

٦- الف) $\begin{cases}x+y=۱۸۰\\ x=y\end{cases}\Rightarrow ۲x=۱۸۰\Rightarrow x=۹۰=y$

ب) $\begin{cases}x+y=۱۸۰\\ x=۲y\end{cases}\Rightarrow ۳y=۱۸۰\Rightarrow y=۶۰\ ,\ x=۲y=۲(۶۰)=۱۲۰$

پ) $\begin{cases}x+y=۱۸۰\\ x=ny\end{cases}\Rightarrow (n+۱)y=۱۸۰\Rightarrow y=\dfrac{۱۸۰}{n+۱}\ ,\ x=n\left(\dfrac{۱۸۰}{n+۱}\right)$

٧- شکل سمت چپ: $۷۰^\circ+۶۰^\circ+z=۱۸۰^\circ\Rightarrow z=۵۰^\circ$ $\quad x+۱۱۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow x=۷۰^\circ$

$y=x=۷۰^\circ$

شکل سمت راست: $JK\parallel MQ\Rightarrow z=۳۵^\circ\ ,\ y=۱۰۰^\circ,\ ۳۵^\circ+۱۰۰^\circ+\hat{L}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \hat{L}=۴۵^\circ$,

$\Rightarrow y=۱۰۰^\circ\ ,\ x=y\Rightarrow x=۱۰۰^\circ$ و $x+\hat{L}+z=۱۸۰\Rightarrow ۱۰۰+۴۵+z=۱۸۰\Rightarrow z=۳۵$

۸- دوشعاع نور CD , AB موازیند و همچنین آینه های RS , PQ نیز موازی قرار داده شده اند ،

بنابراین $\widehat{QBC}=\widehat{RCB}\ ,\ \widehat{PBC}=\widehat{SCB}\ ,\ \widehat{ABC}=\widehat{DCB}\ ,\ \widehat{ABQ}=\widehat{DCR}$

۹- بالا سمت چپ : $y+۱۱۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow y=۷۰^\circ\ ,۱۴۰+\hat{K}=۱۸۰\Rightarrow \hat{K}=۴۰\ ,\ \hat{K}+۱۱۰=x$

$\Rightarrow x=۴۰+۱۱۰=۱۵۰$

بالا سمت راست : $U\hat{Q}T=۱۸۰^\circ-(۹۰^\circ+۵۰^\circ)=۴۰^\circ$ و $۱۱۵^\circ=۹۰^\circ+x\Rightarrow x=۲۵^\circ$

$y=۱۸۰^\circ-U\hat{Q}T-x\Rightarrow y=۱۸۰^\circ-۴۰^\circ-۲۵^\circ=۱۱۵^\circ$

پایین سمت چپ: $x=۳۰^\circ+۴۰^\circ=۷۰^\circ\ ,\ x+y+۶۰^\circ=۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow ۷۰^\circ+y+۶۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow y=۵۰^\circ$

پایین راست: $BF\parallel CE$, AD قاطع $\Leftarrow x=۳۵^\circ\ ,\ I\hat{B}G=y\ ,\ I\hat{B}G+x+۶۵^\circ=۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow y+۳۵^\circ+۶۵^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow y=۸۰^\circ$

---

۱۰ -

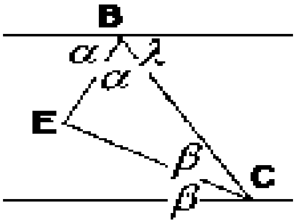
$$\begin{cases} A\hat{C}D+\hat{C}=۱۸۰^\circ & \text{ق زوایای مکمل} \\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ & \text{ق مجموع زوایای مثلث} \end{cases}\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=A\hat{C}D$$

۱۱- هر دو قسمت الف وب از قضیه زوایای مکمل به دست می آید چون زوایای حکم مکمل زوایای فرض هستند.

۱۲- از D به B وصل می کنیم. $E\hat{A}B=\hat{B}_۲+\hat{D}_۲$ خارجی $F\hat{C}B=\hat{B}_۱+\hat{D}_۱$ خارجی,

$$\Rightarrow E\hat{A}B+F\hat{C}B=\left(\hat{B}_۱+\hat{B}_۲\right)+\left(\hat{D}_۱+\hat{D}_۲\right)\Rightarrow E\hat{A}B+F\hat{C}B=\hat{B}+\hat{D}$$

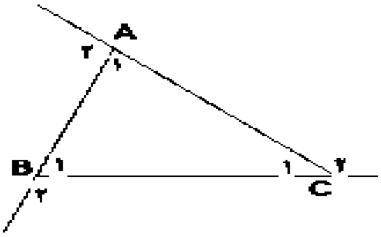
۱۳-



$$\begin{cases} ۲\alpha+\lambda=۱۸۰ & \text{نیم صفحه} \\ \lambda=۲\beta & \text{ق خطوط موازی} \end{cases} \Rightarrow ۲\alpha+۲\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۹۰^\circ$$

مجموع زوایای مثلث $\hat{E}=۱۸۰^\circ-(\alpha+\beta)=۱۸۰^\circ-۹۰^\circ=۹۰^\circ$

۱٤-



$$A_۲+B_۲+C_۲=۱۸۰^\circ-\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ-\hat{B}_۱+۱۸۰^\circ-\hat{C}_۱=$$
$$۵۴۰^\circ-\left(\hat{A}_۱+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱\right)=۵۴۰^\circ-۱۸۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

۱۵ -استدلال استقرائی بر اساس مشاهده و تجربه است ولی در استدلال استنتاجی نتیجه گیری به کمک قواعد منطقی و فرضیات صحیح میباشد مثل اندازه گیری مجموع زوایای مثلث (استقرائی) یا اثبات آنکه مجموع زوایای مثلث۱۸۰ درجه است(استنتاجی).

۱- الف)

$$\begin{cases}AB=AC\\ AS=AS\\ BS=SC\end{cases}\Rightarrow \Delta ABS\cong\Delta ASC\ (\text{ض.ض.ض})\Rightarrow\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ \hat{B}=\hat{C}\\ \hat{S}_1=\hat{S}_2\end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases}AE=EB\\ DE=EC\\ \hat{E}_1=\hat{E}_2\end{cases}\Rightarrow \Delta ADE\cong\Delta ABE\ (\text{ض ز ض})\Rightarrow\begin{cases}AD=BC\\ \hat{A}=\hat{B}\\ \hat{D}=\hat{C}\end{cases}$$

پ)

$$\begin{cases}\hat{C}_1=\hat{C}_2\\ \hat{B}_1=\hat{B}_2\\ BC=BC\end{cases}\Rightarrow \Delta BDC\cong\Delta ABC\ (\text{ز ض ز})\Rightarrow\begin{cases}CD=CA\\ BD=BA\\ \hat{D}=\hat{A}\end{cases}$$

۲- الف) $1\cong 2$ (ض ز ض) ب) $1\cong 3$ (ز ض ز)

۳- الف) $\hat{B}=\hat{J}\Rightarrow \Delta PBY\cong\Delta RSJ$ (ز ض ز)

ب) $MS=XP\Rightarrow \Delta DMS\cong\Delta XPQ$ (ض ض ض)

۴-

$$\begin{array}{ll}M\ \text{وسط}\ PS & \\ M\ \text{وسط}\ RQ & \\ \text{متقابل به رأس} & \end{array}\begin{cases}MP=MS\\ MR=MQ\\ \hat{M}_1=\hat{M}_2\end{cases}\Rightarrow \Delta MPQ\cong\Delta MRS\ (\text{ض ز ض})$$

۵-

$$\begin{array}{l}\text{فرض مساله}\\ \text{مشترک}\\ \text{فرض مساله}\end{array}\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ AP=AP\\ AC=AB\end{cases}\Rightarrow \Delta APC\cong\Delta BPC\ (\text{ض ز ض})\Rightarrow BP=PC\Rightarrow \Delta PBC$$

متساوی الساقین

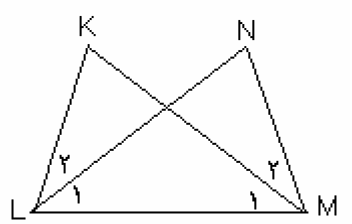
۶-

$$\begin{array}{l}PQ\parallel ST\ ,\ PT\ \text{قاطع}\\ \text{متقابل به راس}\\ R\ \text{وسط}\ PT\end{array}\begin{cases}\hat{P}=\hat{T}\\ \hat{R}_1=\hat{R}_2\\ PR=RT\end{cases}\Rightarrow \Delta PQR\cong\Delta RST\ (\text{ز ض ز})\Rightarrow RQ=RS$$

۷-

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{فرض مساله} & PQ=QR \\ \text{فرض مساله} & PS=SR \\ \text{مشترک} & QS=QS \end{array}\right. \Rightarrow \Delta PQS \cong \Delta RQS\,(\text{ض ض ض}) \Rightarrow \hat{Q}_۱=\hat{Q}_۲$$ ❶

$$❶\left\{\begin{array}{ll} \text{نتیجه} & \hat{Q}_۱=\hat{Q}_۲ \\ \text{مشترک} & QT=QT \\ \text{فرض} & QP=QR \end{array}\right. \Rightarrow \Delta PQT \cong \Delta RQT\,(\text{ض ز ض}) \Rightarrow PT=RT$$



۸-

$$\hat{L}_۱=\hat{M}_۱ \;,\; \hat{L}_۲=\hat{M}_۲ \Rightarrow \hat{L}_۱+\hat{L}_۲=\hat{M}_۱+\hat{M}_۲ \Rightarrow \hat{L}=\hat{M}$$

$$❶\left\{\begin{array}{ll} \text{نتیجه} & \hat{M}=\hat{L} \\ \text{فرض مساله} & \hat{L}_۱=\hat{M}_۱ \\ \text{مشترک} & LM=LM \end{array}\right. \Rightarrow \Delta KML \cong \Delta NML\,(\text{ز ض ز}) \Rightarrow KL=NM$$

۹-

$$AE=AC \;,\; DC=BE \Rightarrow AE+EB=AC+CD \Rightarrow AB=AD$$ ❶

$$❶\left\{\begin{array}{ll} \text{نتیجه} & AB=AD \\ \text{فرض} & AC=AE \\ \text{مشترک} & \hat{A}=\hat{A} \end{array}\right. \Rightarrow \Delta ADE \cong ABC\,(\text{ض ز ض}) \Rightarrow BC=DE$$

۱۰-

الف) $AC=CD \Rightarrow \hat{D}=x \;,\;$ خارجی $\;A\hat{C}B=x+x=۲x$

$$AB=AC \Rightarrow A\hat{C}B=\hat{B}=۷۰^\circ \Rightarrow ۲x=۷۰^\circ \Rightarrow x=۳۵^\circ$$

ب)

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{قائمه} & \hat{S}_۱=\hat{S}_۲ \\ \text{فرض} & PS=SR \\ \text{مشترک} & QS=QS \end{array}\right. \Rightarrow \Delta PQS \cong \Delta RQS \Rightarrow \hat{R}=\hat{P}=۵۰ \;,\; ۵۰+۹۰+x=۱۸۰ \Rightarrow x=۴۰$$

پ) $KL = KM \Rightarrow K\hat{M}L = \hat{L} = ۳۰$,

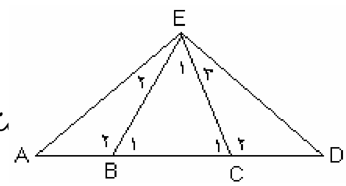
$M\hat{K}J = ۳۰ + ۳۰ = ۶۰$ خارجی برای مثلث LKM , $MK = MJ \Rightarrow M\hat{K}L = M\hat{J}K = ۶۰$

$x = \hat{J} + \hat{L} = ۶۰ + ۳۰ = ۹۰$ خارجی برای مثلث LMJ

۱۱- ΔBEC متساوی الاضلاع $\Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{C}_۱ = \hat{E}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۲ = \hat{C}_۲ = ۱۲۰$

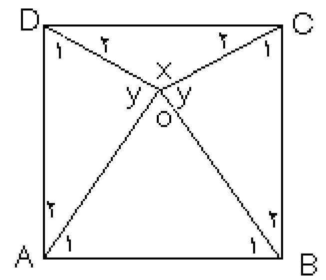
ΔAEB , $\Delta DCE \Rightarrow ۲\hat{A} = ۶۰ \Rightarrow \hat{A} = ۳۰ = \hat{D}$

$\Rightarrow B\hat{E}C = ۶۰$, $A\hat{B}E = ۱۲۰$, $E\hat{A}B = ۳۰$ متساوی الساقین



۱۲- $\hat{A}_۱ + \hat{E} + A\hat{D}E = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳۰ + ۲\hat{E} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{E} = ۷۵ = A\hat{D}E$, $B\hat{C}D = ۲B\hat{C}A = ۲(۷۵) = ۱۵۰$

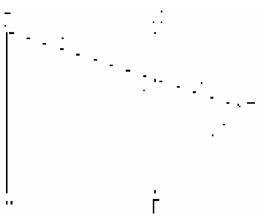
۱۳- (الف)



$\hat{A}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲ = ۳۰$, $AO = AD \Rightarrow y = \hat{D}_۱$

$y + \hat{D}_۱ + \hat{A}_۲ = ۱۸۰ \Rightarrow ۲y + ۳۰ = ۱۸۰ \Rightarrow y = ۷۵$

$A\hat{O}B + ۲y + x = ۳۶۰ \Rightarrow ۶۰ + ۱۵۰ + x = ۳۶۰ \Rightarrow x = ۱۵۰$



(ب) $DC = CB = CE \Rightarrow \Delta DCE$ متساوی الساقین $\Rightarrow \hat{E} = \hat{D}_۱ = x$

$\hat{E} + \hat{D}_۱ + D\hat{C}E = ۱۸۰ \Rightarrow ۲x + ۹۰ + ۶۰ = ۱۸۰ \Rightarrow ۲x = ۳۰$

$\Rightarrow x = ۱۵$, $x + y + B\hat{C}E = ۱۸۰ \Rightarrow ۱۵ + y + ۶۰ = ۱۸۰ \Rightarrow y = ۱۰۵$

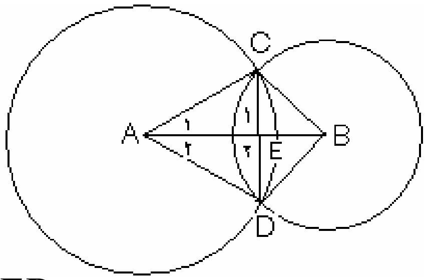
۱٤- $AB = AC \Rightarrow A\hat{B}C = A\hat{C}B \Rightarrow A\hat{B}E = A\hat{C}D$ ق زوایای مکمل

$$\begin{cases} A\hat{B}E = A\hat{C}D \\ AB = AC \\ BE = CD \end{cases} \Rightarrow (\text{ض ز ض})\ \Delta ABE \cong \Delta ACD \Rightarrow AE = AD$$

۱۵- ❶ $QT = QR \Rightarrow Q\hat{T}R = Q\hat{R}T$, ق زاویه ی مکمل $\Rightarrow T\hat{R}S = P\hat{T}Q$

❶ $\begin{cases} \underset{\text{طبق}}{T\hat{R}S = P\hat{T}Q} \\ \underset{\text{فرض}}{TQ = RS} \\ \underset{\text{فرض}}{TR = PT} \end{cases} \Rightarrow \Delta PQT \cong \Delta TRS\,(\text{ض ز ض}) \Rightarrow PQ = TS$

۱۶- $\begin{cases} AC = AD = R & \text{شعاع دایره} \\ BC = BD = r & \text{شعاع دایره} \\ AB = AB & \text{مشترک} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ADB\,(\text{ض ض ض}) \Rightarrow A\hat{C}B = A\hat{D}B$

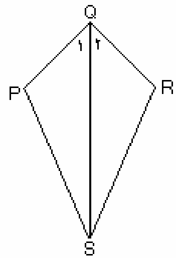


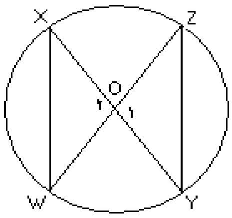
$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \;,\; \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AC = AD \\ AE = AE \end{cases} \Rightarrow \Delta AEC \cong \Delta ADE$

$\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{E}_2 \;, \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = 90^\circ \;,\; CE = ED$

پس AB هم عمود بر DC هم آنرا نصف می کند.

۱۷- $\begin{cases} \hat{Q}_1 = \hat{Q}_2 & \text{نیمساز } QS \text{ قطر} \\ PQ = QR & \text{فرض مساله} \\ QS = QS & \text{مشترک} \end{cases} \Rightarrow \Delta PQS \cong \Delta QRS\,(\text{ض ز ض}) \Rightarrow PS = RS$





۱۸- $\begin{cases} OX = OY = r & \text{شعاع دایره} \\ OZ = OW = r & \text{شعاع دایره} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 & \text{متقابل به رأس} \end{cases} \Rightarrow \Delta OXW \cong \Delta ZOY\,(\text{ض ز ض}) \Rightarrow XW = ZY$

۱۹-

$$\begin{cases} \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ & \text{عمود منصف } PC \\ \hat{E} = \hat{F} = ۹۰^\circ & \text{عمود منصف } PC \\ BP = BP & \text{مشترک} \end{cases} \Rightarrow \Delta BPE \cong \Delta BPF$$

۲۰-

$$\begin{cases} AC = CB & \text{نیمساز } BP \\ \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ = ۹۰ & \text{پای عمود } E,F \\ PC = PC & \text{مشترک} \end{cases} \Rightarrow (\text{ض ز ض})\Delta PCA \cong \Delta BPC \Rightarrow PA = PB$$

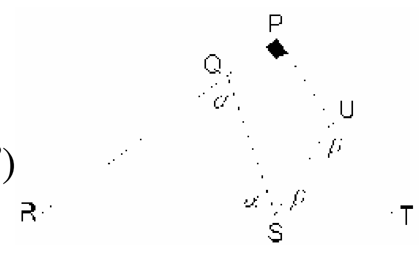
$$(\text{وتر و یک زاویه}) \Rightarrow PE = PF$$

۲۱- الف) ب)

$$\begin{cases} QS = SR & \text{میانه } PS \\ PS = PS & \text{مشترک} \\ PQ = PR & \text{فرض مسأله} \end{cases} \Rightarrow \Delta PQS \cong \Delta PRS \quad (\text{وتر و یک ضلع}) \Rightarrow \begin{cases} \hat{p}_۱ = \hat{p}_۲ \\ \hat{S}_۱ = \hat{S}_۲ = ۹۰ \end{cases}$$

پ) در مثلث متساوی الساقین، نیمساز زاویه بین دو ساق، ارتفاع، میانه و عمود منصف نیز هست.

۲۲- با توجه به تساوی اجزاء داریم

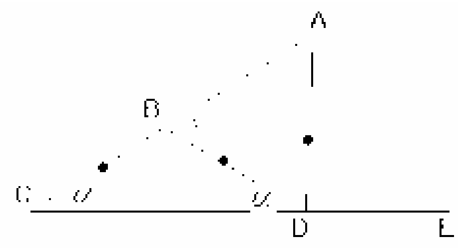


$$\begin{cases} \hat{R} + ۲\alpha = ۱۸۰ \\ \hat{T} + ۲\beta = ۱۸۰ \end{cases} \Rightarrow \hat{R} + \hat{T} + ۲(\alpha + \beta) = ۳۶۰$$

$$\Rightarrow ۹۰ + ۲(\alpha + \beta) = ۳۶۰ \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۳۵ \quad , \quad Q\hat{S}U = ۱۸۰ - (\alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow Q\hat{S}U = ۱۸۰ - ۱۳۵ = ۴۵$$

۲۳-



$$BC = BD \Rightarrow \hat{C} = \hat{D} = \alpha \ , \ \hat{B}_۱ = ۲\alpha, \hat{B}_۱ = \hat{A}$$

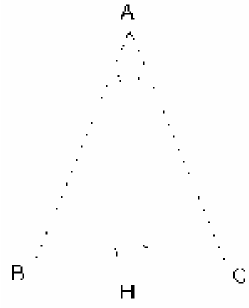
$$\Rightarrow \hat{A} = ۲\alpha \quad , \quad A\hat{D}E = \hat{A} + \hat{C} = ۲\alpha + \alpha = ۳\alpha$$

$$\Rightarrow A\hat{D}E = ۳A\hat{C}E$$

$A\hat{D}E$ خارجی برای مثلث ABC است.

$$\begin{cases} \widehat{B}_۱ = \widehat{B}_۲ \\ \widehat{E} = \widehat{F} = ۹۰^\circ \\ BP = BP \end{cases} \Rightarrow \Delta BPE \cong \Delta BPF$$

۲۴- نیمساز زاویه A را رسم می کنیم.



$$\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ , \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{H}_۱ = H_۲ , \begin{cases} \widehat{H}_۱ = \widehat{H}_۲ \\ \widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \\ AH = AH \end{cases} \Rightarrow \Delta ABH \cong \Delta ACH \text{ (ز ض ز)}$$

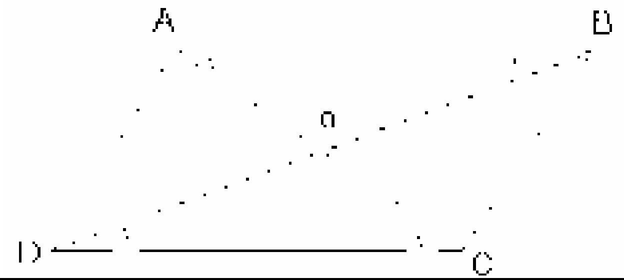
$$\Rightarrow AB = AC \Rightarrow \Delta ABC \text{ متساوی الساقین}$$

تمرین ۱ قضیه خطوط موازی-همنهشتی دو مثلث در حالت دو ضلع و زاویه بین —تعریف همنهشتی

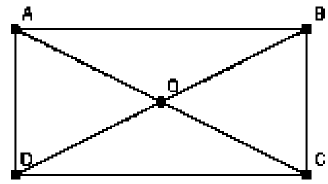
تمرین ۲
❶ $AB \parallel DC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$ ، BD قاطع (ق خطوط موازی)
$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$ ، AC قاطع

وطبق نتیجه کتاب در متوازی الاضلاع ، اضلاع روبرو مساویند پس $AB = DC$ ❷

بنابراین (ز ض ز) $\Delta ABO \cong \Delta DCO \Leftarrow$ ❶و❷ بنابراین $OB = OD$ ، $OA = OC$

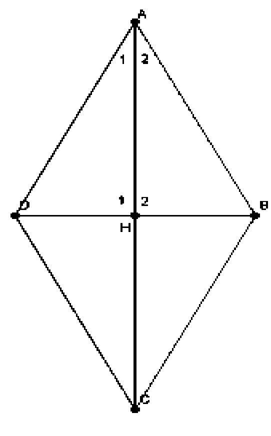


تمرین ۳ مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است پس قطرها همرا نصف می کنند ولی



$$\begin{cases} \hat{D} = \hat{C} = ۹۰ \\ AD = BC \Rightarrow (\text{ض ز ض})\, \Delta ADC \cong \Delta BDC \Rightarrow AC = DB \\ DC = DC \end{cases}$$

تمرین ۴



$$\begin{cases} AB = AD & \text{لوزی} \\ BC = DC \Rightarrow \Delta ADC \cong \Delta ABC\, (\text{ض ض ض}) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 & \text{لوزی} \\ AC = AC & \text{مشترک} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AD = AB \Rightarrow \Delta AHD \cong \Delta AHB\, (\text{ض ز ض}) \Rightarrow \begin{cases} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = ۹۰ \\ DH = HB \end{cases} \\ AH = AH \end{cases}$$

به روش مشابه می توان ثابت کرد $AH = HC$

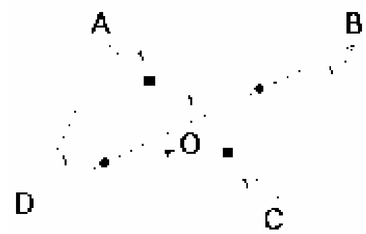
۱- خم ساده : الف، ب، پ، ت، ج   خم ساده بسته : ب، پ، ت، ج

۲- چند ضلعی : ب، ت، ث، ج   محدب : ب، ج   غیر محدب: ت، ث

٤- الف) شکل الف مسأله ۱   ب) شکل پ مسأله ۱

۵- الف) ۰ قطر   ب) $\frac{۶(۶-۳)}{۲}=۹$ پ) $\frac{۸(۸-۳)}{۲}=۲۰$

به طور کلی برای n ضلعی تعداد قطرها برابر $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است.

٦- 

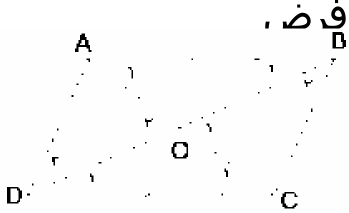
الف) $\begin{cases} OA=OC \\ OB=OD \Rightarrow \Delta OAB \cong \Delta ODC(\text{ض ز ض}) \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{C}_۱ \\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \end{cases}$

$\hat{A}_۱=\hat{C}_۱$, عکس ق خطوط موازی $\Rightarrow AB \parallel DC$ ❶

به همین ترتیب ثابت می شود $\hat{D}_۱=\hat{B}_۱$ پس $AD \parallel BC$ ❷ .

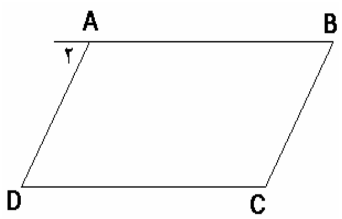
❶,❷ $\Rightarrow ABCD$ متوازی الاضلاع

ب) $\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC \text{ , مورب } AC \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{C}_۱ \\ AB \parallel DC \text{ , مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{D}_۱ \\ AB=DC \text{ ف ض .} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{DOC} \Rightarrow \begin{cases} OA=OC \\ OB=OD \end{cases}$ ❶



طبق ❶ چون قطرها هم را نصف کرده اند،چهارضلعی متوازی الضلاع است

پ)



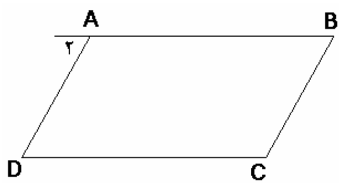
$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ \\ \text{فرض} \quad \hat{A}=\hat{C} \\ \text{فرض} \quad \hat{B}=\hat{D}\end{array}\right\} \Rightarrow 2\hat{A}+2\hat{D}=360^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{D}=180^\circ$$

$$\hat{A}+\hat{A}_2=180 \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{D}$$

پس طبق عکس ق خطوط موازی $AB \parallel DC$.

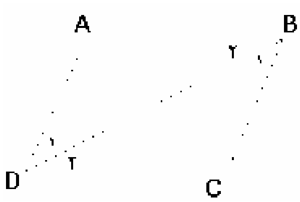
به همین ترتیب می توان ثابت کرد $AD \parallel BC$ بنابراین $ABCD$ متوازی الاضلاع است.

ت) $\left\{\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{A}_2=180 \\ \hat{A}+\hat{D}=180\end{array}\right. \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{D}$ و طبق عکس ق خطوط موازی



$AB \parallel DC$ به همین ترتیب $AD \parallel BC$ پس $ABCD$ متوازی الضلاع

ث)

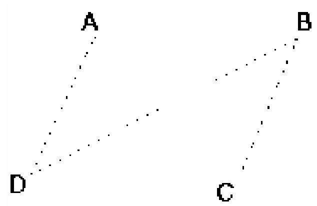


$$\left.\begin{array}{l}AD=BC \\ AB=DC \\ BD=BD\end{array}\right\} \overset{\text{ض ض ض}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ABD}=\overset{\Delta}{BDC} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\hat{B}_1=\hat{D}_1 \Rightarrow AC \parallel BD \\ \hat{B}_2=\hat{D}_2 \Rightarrow AB \parallel DC\end{array}\right. \Rightarrow ABCD$$ متوازی الاضلاع

ج) $\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{DBC}$, $DB=DB \Rightarrow \hat{A}=\hat{C}$, $\hat{B}_1+\hat{B}_2=\hat{D}_1+\hat{D}_2 \Rightarrow \hat{B}=\hat{D}$

پس طبق قسمت (پ) چون دو زاویه مقابل در $ABCD$ مساویند ،

بنابراین چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.



۱- $S=\frac{۱}{۲}h(۲h)=h^{۲}$

۲- ارتفاع$=x$ قاعده $=۲x$

$S=\frac{۱}{۲}(۲x)(x)=۳۶\Rightarrow x^{۲}=۳۶\Rightarrow x=۶\Rightarrow$ قاعده $=۲x=۱۲$

۳- طول $=۵a$ و عرض$=a$

$S=a(۵a)=۱۴۴۰\Rightarrow ۵a^{۲}=۱۴۴۰\Rightarrow a^{۲}=۲۸۸\Rightarrow a=۱۲\sqrt{۲}$

طول $=۵a=۵(۱۲\sqrt{۲})=۶۰\sqrt{۲}$

۴- الف و ب) $S=۴(Lh)+L^{۲}\Rightarrow S=۴(۴\times ۵)+۴^{۲}=۸۰+۱۶=۹۶$

۵- $S=\frac{۱}{۲}x(۱۲)=۳۶\Rightarrow ۶x=۳۶\Rightarrow x=۶$ و قاعده$=x$

۶- طول ساق $S=\frac{۱}{۲}(x\times x)=۴۰\Rightarrow x^{۲}=۸۰\Rightarrow x=۴\sqrt{۵}$

۷- $XZ=a\quad YZ=b\quad\Rightarrow BC=۲b\ ,\ AC=۲a\ ,\ \frac{S_{ABC}}{S_{XYZ}}=\frac{\frac{۱}{۲}(۲b)(۲a)}{\frac{۱}{۲}(b)(a)}=۴$

۸- $\frac{S_{ABC}}{S_{XYZ}}=\frac{\frac{۱}{۲}(nb)(na)}{\frac{۱}{۲}(b)(a)}=n^{۲}$

۹- مساحت سایه زده شده = مجموع مساحت مربع ها - مساحت مثلث پایین

$$\Rightarrow S=\left(۵^{۲}+۴^{۲}+۳^{۲}\right)-\frac{۱}{۲}(۵+۴+۳)(۵)\Rightarrow S=(۲۵+۱۶+۹)-۳۰=۵۰-۳۰=۲۰$$

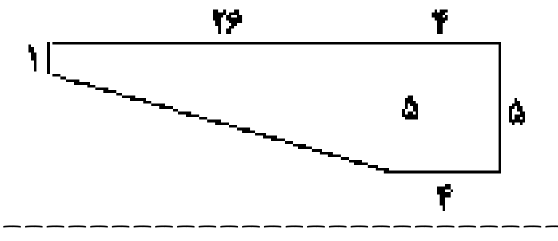
۱۰- $MN=NQ$ و ارتفاع مثلثها برابر $\Rightarrow \dfrac{S_{MNP}}{S_{NQP}}=\dfrac{\frac{۱}{۲}MN\times h}{\frac{۱}{۲}NQ\times h}=۱\Rightarrow S_{MNP}=S_{NQP}$

۱۱- الف) $۲QN=NM\Rightarrow \dfrac{S_{PNM}}{S_{PNQ}}=\dfrac{\frac{۱}{۲}MN\times h}{\frac{۱}{۲}NQ\times h}=\dfrac{NM}{NQ}=\dfrac{۲NQ}{NQ}=۲$

ب) $N'M=N'N=NQ\Rightarrow \dfrac{S_{PQN}}{S_{PN'M}}=\dfrac{\frac{۱}{۲}NQ\times h}{\frac{۱}{۲}N'M\times h}=\dfrac{NQ}{N'M}=۱\Rightarrow S_{PQN}=S_{PN'M}$

پ) $QM=۳NN'\Rightarrow \dfrac{S_{PQM}}{S_{PNN'}}=\dfrac{\frac{۱}{۲}QM\times h}{\frac{۱}{۲}NN'\times h}=\dfrac{QM}{NN'}=\dfrac{۳NN'}{NN'}=۳$

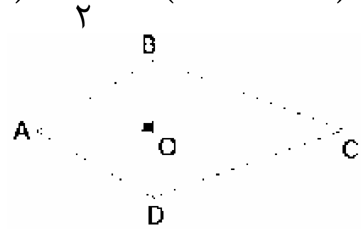
۱۲- $S=\frac{۱}{۲}(۵+۱)(۲۶)+(۴\times ۵)=۷۸+۲۰=۹۸$



۱۳-

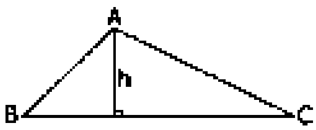
$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{۱}{۲}(AC\times OB)+\frac{۱}{۲}(AC\times OD)=\frac{۱}{۲}AC(OB+OD)$$

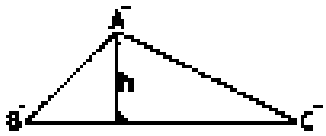
$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AC\times BD$$



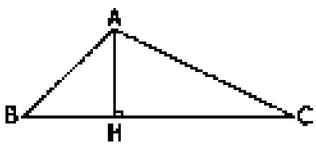
۱۴- مساحت کف استخر $= ۹ \times ۶ = ۵۴$ و مساحت کاشی$= ۰/۵ \times ۰/۵ = ۰/۲۵$

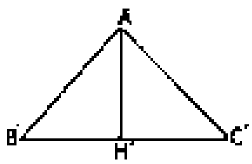
تعداد کاشی $= \dfrac{۵۴}{۰/۲۵} = \dfrac{۵۴}{\frac{۱}{۴}} = ۵۴ \times ۴ = ۲۱۶ \Rightarrow$ هزینه $= ۳۵۰ \times ۲۱۶ = ۷۵۶۰۰$





۱۵- $$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{۱}{۲} BC \times h}{\frac{۱}{۲} B'C' \times h} = \frac{BC}{B'C'}$$



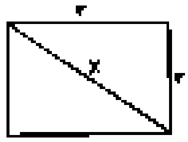


۱۶- $$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{۱}{۲} BC \times AH}{\frac{۱}{۲} B'C' \times A'H'} = \frac{AH}{A'H'}$$

---

۱۷ – الف بر اساس اصل ۱ ، ب بر اساس اصل ۲ ، پ بر اساس اصل ۴ می باشد.

۱- الف) $x^{۲} = ۹ + ۹ \Rightarrow x^{۲} = ۱۸ \Rightarrow x = \sqrt{۹ \times ۲} = ۳\sqrt{۲}$



ب) $x^{۲} = ۵^{۲} + ۵^{۲} \Rightarrow x^{۲} = ۵۰ \Rightarrow x = \sqrt{۲۵ \times ۲} = ۵\sqrt{۲}$

پ) $x^{۲} = a^{۲} + a^{۲} \Rightarrow x^{۲} = ۲a^{۲} \Rightarrow x = \sqrt{۲a^{۲}} = a\sqrt{۲}$

۲- الف) $d^{۲} = a^{۲} + b^{۲} = ۳^{۲} + ۵^{۲} = ۹ + ۲۵ = ۳۴ \Rightarrow d = \sqrt{۳۴}$

ب) $d^{۲} = a^{۲} + b^{۲} = ۴^{۲} + ۷^{۲} = ۱۶ + ۴۹ = ۶۵ \Rightarrow d = \sqrt{۶۵}$

پ) $d^{۲} = (۳r)^{۲} + (۵r)^{۲} = ۹r^{۲} + ۲۵r^{۲} = ۳۴r^{۲} \Rightarrow d = r\sqrt{۳۴}$

ت) $d^{۲} = (۴r)^{۲} + (۷r)^{۲} = ۱۶r^{۲} + ۴۹r^{۲} = ۶۵r^{۲} \Rightarrow d = r\sqrt{۶۵}$

۳- ضلع مربع x: $x^{۲} = ۱۴۴ \Rightarrow x = ۱۲ \Rightarrow$ قطر مربع $= x\sqrt{۲} = ۱۲\sqrt{۲}$

٤- اضلاع زاویه قائمه: $x \,,\, ۲x \quad , \quad S = \frac{۱}{۲}(۲x)(x) = ۷۲ \Rightarrow x^{۲} = ۷۲ \Rightarrow x = ۶\sqrt{۲} \;, ۲x = ۱۲\sqrt{۲}$

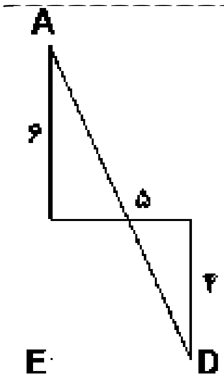
وتر $= a \Rightarrow a^{۲} = (۶\sqrt{۲})^{۲} + (۱۲\sqrt{۲})^{۲} = ۷۲ + ۲۸۸ \Rightarrow a^{۲} = ۳۶۰ \Rightarrow a = ۶\sqrt{۱۰}$

۵- الف) $PA_{۱}^{\,۲} = ۱^{۲} + ۱^{۲} = ۲ \Rightarrow PA_{۱} = \sqrt{۲}$

ب) $PA_{۲}^{\,۲} = (\sqrt{۲})^{۲} + ۱^{۲} = ۲ + ۱ = ۳ \Rightarrow PA_{۲} = \sqrt{۳}$ پ) $PA_{۳} = \sqrt{۴} \;,\; PA_{n} = \sqrt{n+۱}$

٦- $AE^{۲} + ED^{۲} = AD^{۲} \Rightarrow (۶+۴)^{۲} + ۵^{۲} = AD^{۲} = ۱۰۰ + ۲۵ = ۱۲۵$

$\Rightarrow AD = \sqrt{۱۲۵} = ۵\sqrt{۵}$



۷ - اضلاع مثلث قائم الزاویه $= ۲x,۳x \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}(۲x)(۳x) \Rightarrow ۳x^{۲}=۲۷$

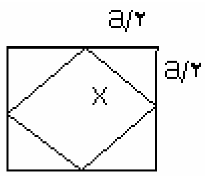
$\Rightarrow x^{۲}=۹ \Rightarrow x=۳$

اضلاع زاویه قائمه $۲(۳),۳(۳)=۶,۹ \Rightarrow a^{۲}=۶^{۲}+۹^{۲}=۳۶+۸۱=۱۱۷ \Rightarrow a=۳\sqrt{۱۳}$

۸- اضلاع قائمه $= ۴x,۵x \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}(۴x)(۵x)=۳۲۰ \Rightarrow ۱۰x^{۲}=۳۲۰ \Rightarrow x^{۲}=۳۲ \Rightarrow x=۴\sqrt{۲}$

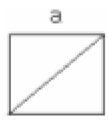
اضلاع زاویه قائمه $=\left\{ ۴(۴\sqrt{۲})\,,\, ۵(۴\sqrt{۲}) \right\}=\left\{ ۱۶\sqrt{۲} \;,\; ۲۰\sqrt{۲} \right\}$

۹- اگر طول ضلع مربع بزرگ a و ضلع مربع کوچک x باشد،



$$x^{۲}=\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}+\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}=\frac{۲a^{۲}}{۴}=\frac{a^{۲}}{۲} \Rightarrow x^{۲}=\frac{a^{۲}}{۲} \Rightarrow \frac{S'}{S}=\frac{x^{۲}}{a^{۲}}=\frac{\frac{a^{۲}}{۲}}{a^{۲}}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow S'=\frac{۱}{۲}S$$

۱۰-اگر ضلع مربع a باشد ،



قطر مربع $a\sqrt{۲}=۸\sqrt{۲} \Rightarrow a=۸ \; S=a^{۲}=۸^{۲}=۶۴$

---

۱۱ - $PQ^{۲}+(۱۲-۸)^{۲}=۳۰^{۲} \Rightarrow PQ^{۲}+۱۶=۹۰۰ \Rightarrow PQ^{۲}=۸۸۴ \Rightarrow PQ=\sqrt{۸۸۴}=۲\sqrt{۲۲۱}$

---

۱۲ - الف) $\begin{cases} AQ^{۲}=a^{۲}+b^{۲} \\ DQ^{۲}=a^{۲}+c^{۲} \end{cases} \Rightarrow AQ^{۲}+DQ^{۲}=۲a^{۲}+b^{۲}+c^{۲} \;,\; AQ^{۲}+DQ^{۲}=AD^{۲}$

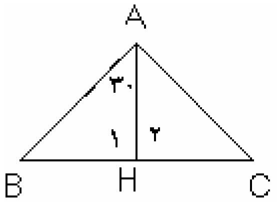
$\Rightarrow AD^{۲}=۲a^{۲}+b^{۲}+c^{۲} \Rightarrow AD=\sqrt{۲a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}$

$AD=BC=(b+c) \Rightarrow AD^{۲}=(b+c)^{۲}=b^{۲}+c^{۲}+۲bc$

از طرفی طبق (الف) می دانیم $AD^{۲}=۲a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}$

پس $\Rightarrow b^{۲}+c^{۲}+۲bc=۲a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow ۲a^{۲}=۲bc\Rightarrow a^{۲}=bc$

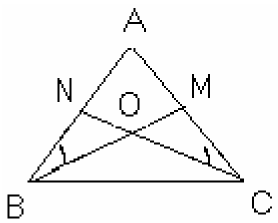
۱۳- قاعده BH از مثلث ABH را به اندازه ی خود ادامه می دهیم و به A وصل می کنیم.



$$\begin{cases} AH=AH \\ \hat{H}_{۱}=\hat{H}_{۲} \\ BH=HC \end{cases} \overset{\text{ض ز ض}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ABH}\cong \overset{\Delta}{AHC}\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=۶۰^{\circ}\Rightarrow \hat{A}=۶۰$$

بنابر این مثلث ABC متساوی الاضلاع است . پس $BC=AB\ ,\ BC=۲BH\Rightarrow ۲BH=AB$

۱۴- در مثلث متساوی الاضلاع ، نیمساز هر زاویه نقش میانه ، عمودمنصف و ارتفاع هم دارد پس



$$AB=AC\Rightarrow NB=MC\ ,\ \begin{cases} NB=MC \\ \hat{N}=\hat{M}=۹۰ \\ \hat{B}_{۱}=\hat{C}_{۱}=۳۰ \end{cases} \overset{\text{ز ض ز}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ONB}\cong \overset{\Delta}{OMC}$$

$$\Rightarrow ON=OM\ ,\ \hat{B}_{۱}=۳۰$$

طبق مسئله ۱۳ $\overset{\Delta}{ONB}:\ \dfrac{OB}{ON}=۲\ ,\ ON=OM\Rightarrow \dfrac{OB}{OM}=۲$ به همین ترتیب $\dfrac{OC}{ON}=۲$

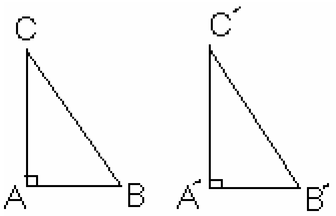
۱۵-

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ACP}: PC^{۲}=AC^{۲}-AP^{۲} \\ \overset{\Delta}{BCP}: PC^{۲}=BC^{۲}-PB^{۲} \quad \Rightarrow ۲PC^{۲}=AB^{۲}-\left(AP^{۲}+PB^{۲}\right) \\ \overset{\Delta}{ABC}: AB^{۲}=AC^{۲}+BC^{۲} \end{cases}$$

$$=(AP+PB)^{۲}-\left(AP^{۲}+BP^{۲}\right)=AP^{۲}+PB^{۲}+۲AP\times PB-AP^{۲}-PB^{۲}$$

$$\Rightarrow ۲PC^{۲}=۲AP\times PB\Rightarrow PC^{۲}=AP\times PB$$

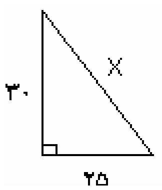
ب)
$$AC^{۲} = AP^{۲} + PC^{۲} = AP^{۲} + AP \times PB = AP(AP + PB)$$
$$AP \times AB \Rightarrow AC^{۲} = AP \times AB$$



۱۶- فرض $\begin{cases} BC = B'C' \\ AB = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A'} = ۹۰ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$ حکم

اثبات)

$$\begin{cases} BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} \\ B'C'^{۲} = A'B'^{۲} + A'C'^{۲} \Rightarrow AC = A'C', \\ BC = B'C', AB = A'B' \end{cases} \begin{cases} AC = A'C' \\ AB = A'B' \\ BC = B'C' \end{cases} \overset{\text{ض ض ض}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$



۱۷ - $x^{۲} = ۳۰^{۲} + ۲۵^{۲} = ۹۰۰ + ۶۲۵ \Rightarrow x^{۲} = ۱۵۲۵ \Rightarrow x = \sqrt{۱۵۲۵} = ۵\sqrt{۶۱}$

۱۸- الف)
$$AF = ۱۰ \,,\, AD = AF \,,\, AG = GD \,,\, AD^{۲} = AG^{۲} + GD^{۲}$$
$$\Rightarrow ۱۰^{۲} = ۲AG^{۲} \Rightarrow AG^{۲} = ۵۰ \,,\, S_{AGD} = \frac{۱}{۲} AG \times GD = \frac{۱}{۲} AG^{۲}$$
$$S_{ADG} = \frac{۱}{۲}(۵۰) = ۲۵$$

ب)
$$CE = ۱۸ \,,\, DE = x \Rightarrow x + \frac{x}{۲} = ۱۸ \Rightarrow x = ۱۲ \,,\, AG = y \Rightarrow ۲y^{۲} = ۱۲^{۲}$$
$$y^{۲} = ۷۲ \,,\, S_{AGD} = \frac{۱}{۲} AG \times GD = \frac{۱}{۲} AG^{۲} = \frac{۱}{۲} y^{۲} = \frac{۱}{۲}(۷۲) = ۳۶$$

$$BD=۳\sqrt{۲}\ ,\ ۲BH^{۲}=BD^{۲}\Rightarrow ۲BH^{۲}=۱۸\Rightarrow BH=۳=HD\Rightarrow AD=۶$$

پ) $, AG=y\Rightarrow ۲y^{۲}=۳۶\Rightarrow y^{۲}=۱۸\ ,\ S_{AGD}=\frac{۱}{۲}AG\times GD=\frac{۱}{۲}AG^{۲}$

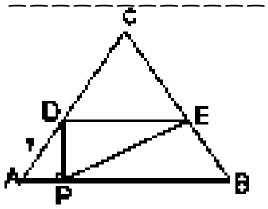
$$=\frac{۱}{۲}y^{۲}=\frac{۱}{۲}(۱۸)=۹$$

ت) $S_{BCDH}=۴۹=HD^{۲}\Rightarrow HD=۷\Rightarrow AD=۱۴,\ AG=y\Rightarrow ۲y^{۲}=۱۹۶$

$$y^{۲}=۹۸\ ,\ S_{AGD}=\frac{۱}{۲}AG\times GD=\frac{۱}{۲}AG^{۲}=\frac{۱}{۲}y^{۲}=\frac{۱}{۲}(۹۸)=۴۹$$

ث) $S_{AGDEF}=۲۷=۳S_{AGD}\Rightarrow S_{AGD}=۹$

۱۹- الف) $\hat{A}=۳۰^{\circ}\Rightarrow AP=\frac{۱}{۲}AD\Rightarrow$

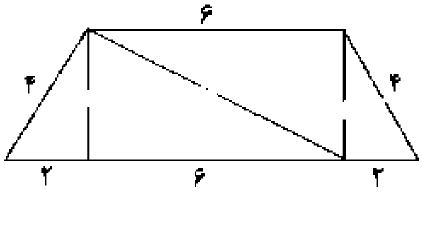


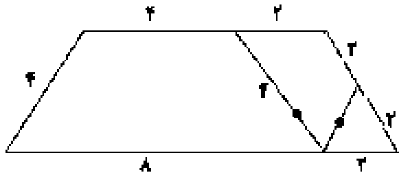
$$AP=۲\quad ,\quad DP^{۲}=۴^{۲}-۲^{۲}=۱۲\Rightarrow DP=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$

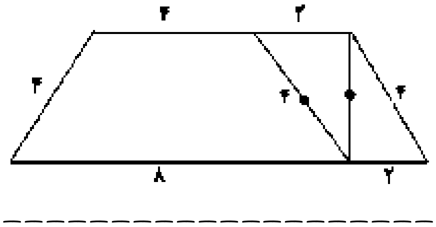
ب) $PE^{۲}=DE^{۲}+DP^{۲}=۶^{۲}+۱۲=۳۶+۱۲=۴۸\Rightarrow PE=\sqrt{۴۸}=۴\sqrt{۳}$

پ) روی DE ، ٤ واحد جدا کرده و به موازات BEرسم می کنیم و قطر مرسوم از E را رسم کرده تا در مثلث باقیمانده را روی ذوزنقه حاصل قرار می دهیم.(دو برش)

اگر ذوزنقه اخیر را دو قسمت کنیم (سه برش)



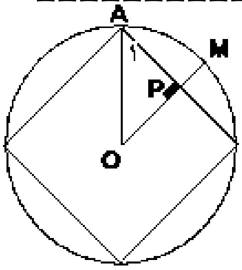




۲۰- الف) $a^۲ = x^۲ + x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ = a^۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$

ضلع مربع$= ۲x + a = ۲\left(\frac{a\sqrt{۲}}{۲}\right) + a = a\left(\sqrt{۲}+۱\right)$

ب) $۲x + a = ۱۰ \Rightarrow a\left(\sqrt{۲}+۱\right) = ۱۰ \Rightarrow a = \frac{۱۰}{\sqrt{۲}+۱}$ و محیط هشت ضلعی $p = ۸a = \frac{۸۰}{\sqrt{۲}+۱}$



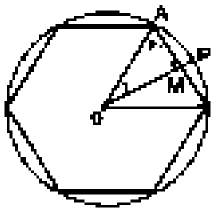
۲۱- الف) $\hat{A}_۱ = ۴۵^\circ \Rightarrow \hat{} = ۴۵^\circ \Rightarrow OM = AM$

$OM^۲ + AM^۲ = R^۲ = ۱ \Rightarrow ۲OM^۲ = ۱ \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ب) $MP = OP - OM = ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پ) $AP^۲ = MP^۲ + AM^۲ = \left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ = ۱ + \frac{۱}{۲} - \sqrt{۲} + \frac{۱}{۲} = ۲ - \sqrt{۲}$

$\Rightarrow AP = \sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$



۲۲- زوایای شش ضلعی منتظم ۱۲۰ درجه است پس

الف) $\hat{O}_۱ = ۳۰^\circ \quad , \quad OA = ۱ \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲} , \ OM = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ب) $, OP = ۱ \Rightarrow MP = OP - OM = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پ) $AP^۲ = AM^۲ + MP^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \left(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} + ۱ + \frac{۳}{۴} - \sqrt{۳}$

$\Rightarrow AP^۲ = ۲ - \sqrt{۳} \Rightarrow AP = \sqrt{۲ - \sqrt{۳}}$

۱- $\frac{۱۰}{۴۰۰}=\frac{x}{۸۰}\Rightarrow x=\frac{۱۰\times۸۰}{۴۰۰}=۲$

۲- الف) $x=\sqrt{۲۵\times۴}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$

ب) $x=\sqrt{۶\sqrt{۲}\times۳\sqrt{۲}}=\sqrt{۳۶}=۶$

پ) $x=\sqrt{۲۱\times۷}=\sqrt{۱۴۷}=۷\sqrt{۳}$

۳- الف) طرفین وسطین ب) وارون دو نسبت پ) جابجائی طرفین ت) جمع در صورت

٤- الف) $\frac{x}{y}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{x+y}{y+۲}=\frac{۱}{۲}$

ب) $\frac{a+b+c+d}{۲+۳+۴+۵}=\frac{a}{۲}$

پ) $\frac{۱۲}{۳}=\frac{x}{۱۰}$

۵- الف) $۴x=۲۴\times۵\Rightarrow x=\frac{۲۴\times۵}{۴}=۳۰$

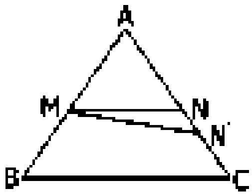
ب) $۷x=۵۴۰-۳x\Rightarrow ۱۰x=۵۴۰\Rightarrow x=۵۴$

پ) $x^{۲}=۳۶\Rightarrow x=\pm۶$

ت) $۱۲x-۸=۲x+۲\Rightarrow ۱۰x=۱۰\Rightarrow x=۱$

٦- الف) $x=\frac{۲۰\times۹}{۱۲}=۱۵\ ,\ y=\frac{۲۱\times۱۲}{۹}=۲۸$

ب) $x^{۲}=۵\times۲۰=۱۰۰\Rightarrow x=\pm۱۰\ ,\ y=\frac{۲۰}{x}=\frac{۲۰}{\pm۱۰}=\pm۲$



تمرین : عکس ق تالس (حکم) $MN \parallel BC \Leftarrow \dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AN}{NC}$ (فرض)

برهان خلف) اگر $MN \parallel BC$ نباشد خودمان MN' را موازی BC رسم می کنیم .

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN'}{AC}$$ نتیجه ق تالس ، $MN' \parallel BC$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$ فرض

پس $AN = AN'$ که این غیر ممکن است بنابراین $MN \parallel BC$.

۱- ت) $\dfrac{RU}{RB}=\dfrac{RE}{RL}$ پ) $\dfrac{EL}{RE}=\dfrac{UB}{RU}$ ب) $\dfrac{NW}{CW}=\dfrac{RO}{CO}$ الف) $\dfrac{OR}{RC}=\dfrac{WN}{NC}$

۲- دانش آموز اول در سمت راست عبارت ، حالت جزء به کل را رعایت نکرده است .

۳- ب) $\dfrac{x}{۲۴}=\dfrac{۱۵}{۱۵+۲۱}=\dfrac{۱۵}{۳۶}=\dfrac{۵}{۱۲}\Rightarrow x=\dfrac{۵\times ۲۴}{۱۲}=۱۰$ الف) $\dfrac{x}{۴}=\dfrac{۳}{۵}\Rightarrow ۵x=۱۲\Rightarrow x=\dfrac{۱۲}{۵}$

ت) $\dfrac{x}{۴}=\dfrac{۱۶}{x}\Rightarrow x^۲=۶۴\Rightarrow x=۸$ پ) $\dfrac{۲}{x}=\dfrac{۴}{۶+۴}=\dfrac{۴}{۱۰}=\dfrac{۲}{۵}\Rightarrow x=۵$

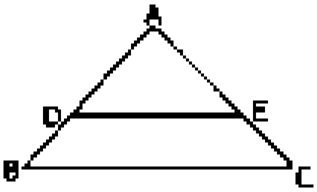
٤- $DE \parallel FG$ ق تالس و $\Rightarrow \dfrac{AD}{DF}=\dfrac{AE}{EB}$ ①

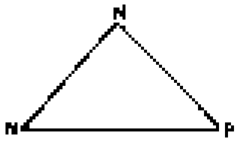
$EF \parallel BC$ ق تالس و $\Rightarrow \dfrac{AF}{FC}=\dfrac{AE}{EB}$ ② ①,② $\Rightarrow \dfrac{AD}{DF}=\dfrac{AF}{FC}$

٥- $$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}\Rightarrow \frac{x}{x+۷}=\frac{x-۳}{x+۱}\Rightarrow x^۲+x=x^۲+۴x-۲۱\Rightarrow ۳x=۲۱\Rightarrow x=۷$$

٦- ق تالس $$\Rightarrow \frac{JA}{JL}=\frac{JH}{JN}\Rightarrow \frac{۱۰۰}{JL}=\frac{۶۰}{۶۰+۱۸۰}=\frac{۶۰}{۲۴۰}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow JL=۴\times ۱۰۰=۴۰۰$$

تمرین ۱ –





فرض $\dfrac{AB}{MN}=\dfrac{AC}{MP}=\dfrac{BC}{NP} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNP$ حکم

اثبات) روی AC, AB، به اندازه MN, MP جدا می کنیم ، تا نقاط E, D به دست آید.

$$\frac{MN}{AB}=\frac{MP}{AC} \quad , \quad MN = AD \,,\, MP = AE \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \text{ و عکس ق تالس} \Rightarrow DE \parallel BC$$

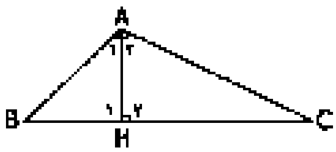
$$\text{ق خطوط موازی} \Rightarrow \hat{D}=\hat{B} \,,\, \hat{E}=\hat{C} \quad , \quad \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{MN}{AB}=\frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow DE = NP \Rightarrow \begin{cases} DE = NP \\ AD = MN \Rightarrow \text{ض ض ض } \Delta ADE \cong \Delta MNP \\ AE = MP \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{M}=\hat{A} \\ \hat{D}=\hat{N} \,,\, \hat{D}=\hat{B} \Rightarrow \hat{B}=\hat{N} \\ \hat{E}=\hat{P} \,,\, \hat{E}=\hat{C} \Rightarrow \hat{P}=\hat{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNP$$

تمرین –۲



$$\hat{A}=۹۰^\circ \Rightarrow AH^۲ = BH \times HC$$

$$\begin{cases} \hat{B}+\hat{A}_۱ = ۹۰^\circ \\ \hat{A}_۱+\hat{A}_۲ \end{cases} \Rightarrow \hat{B}=\hat{A}_۲ \,,\, \hat{H}_۱=\hat{H}_۲$$

$$\text{حالت دو زاویه} \Rightarrow \Delta ABH \sim \Delta AHC$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AH}{HC}=\frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^۲ = BH \times HC$$

۱- الف) $\frac{۳}{۲}=\frac{۶}{۴}\neq\frac{۵}{۳}\Rightarrow \Delta ABC \nsim \Delta EFG$

ب) $\hat{H}=\hat{K}=۹۰\ ,\ \hat{D}=\hat{L}=۳۰\Rightarrow \Delta DHI\sim\Delta LKJ$ (حالت دو زاویه)

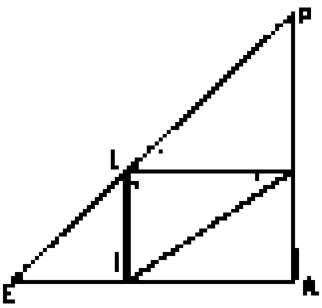
پ) $\hat{N}_۱=\hat{N}_۲\ ,\ \{\hat{P}\ ,\ \hat{M}\}\neq\{\hat{O}\ ,\ \hat{Q}\}\Rightarrow \Delta MNP\nsim\Delta NQO$

ت) $\hat{R}=\hat{U}=۳۰\ ,\ \hat{T}_۱=\hat{T}_۲=۹۰\Rightarrow \Delta RST\sim\Delta RTU$ (حالت دو زاویه)

ث) $\hat{A}=\hat{A}'=۶۰\ ,\ \hat{B}=\hat{B}'=۶۰\Rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$ (حالت دو زاویه)

۲- $L\parallel J\Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow \frac{۴}{۱۲}=\frac{y}{۱۵}\Rightarrow y=۵\ ,\ x+y=۱۵\Rightarrow x=۱۰$

۳- $\hat{E}_۱=\hat{E}_۲$ متقابل به راس ، $\hat{O}=\hat{L}=۹۰^{\circ}\Rightarrow \Delta OEI\sim\Delta ELT$ (حالت دو زاویه)



۴- $\frac{PA}{AR}=\frac{PL}{LE}=۱\Rightarrow$ عکس تالس $AL\parallel ER\Rightarrow \hat{L}_۱=\hat{E}$

وبه همین ترتیب $IL\parallel PR\ ,\ AI\parallel PE$ پس $\hat{L}_۱=\hat{A}_۱$ بنابراین $\hat{A}_۱=\hat{E}$

وبه همین ترتیب $\hat{L}_۲=\hat{R}$ بنابه حالت دو زاویه مساوی $\Delta ALI\sim\Delta PRE$

۵- الف) $\frac{CB}{C'B'}=\frac{AC}{A'C'}$ ب) $\hat{B}=\hat{B}'$ پ) $\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'A'}{BA}$ ت) $\hat{C}=\hat{C}'$

۶- الف) $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ (متقابل به راس) $,\ \hat{B}=\hat{B}'=۹۰\Rightarrow$ (حالت دو زاویه) $\Delta A'B'C'\sim\Delta ABC$

ب) $\Rightarrow \frac{B'C'}{BC}=\frac{A'B'}{AB}\Rightarrow \frac{۱/۸}{BC}=\frac{۳}{۲۰}\Rightarrow BC=\frac{۲۰\times ۱/۸}{۳}=\frac{۳۶}{۳}\Rightarrow BC=۱۲m$

۷- $\hat{C} = B\hat{D}E \ , \ \hat{B} = \hat{B} \Rightarrow$ (حالت دو زاویه) $\Delta BED \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{۲۴}{۴۸} = \frac{y}{۲۴} = \frac{۱۸}{x+۲۴} \Rightarrow y = \frac{۲۴\times۲۴}{۴۸} = ۱۲ \Rightarrow$$

$$y = ۱۲ \ , \ \frac{۱۲}{۲۴} = \frac{۱۸}{x+۲۴} \Rightarrow x+۲۴ = ۳۶ \Rightarrow x = ۱۲$$

۸- (متقابل به راس) $\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ \ , \ \hat{A} = \hat{O} = ۹۰^\circ \Rightarrow$ (تساوی دو زاویه) $\Delta ABC \sim \Delta ODC$

$$\Rightarrow \frac{AC}{OC} = \frac{AB}{OD} \Rightarrow \frac{۲۵}{۶۰} = \frac{۱۵}{x} \Rightarrow x = \frac{۱۵\times۶۰}{۲۵} = ۳\times۱۲ = ۳۶$$

۹- $$\frac{x}{x+۱۵۰۷۰۶۴۰۰} = \frac{۶/۴\times۱۰^{۳}}{۷\times۱۰^{۵}} = ۰/۰۰۹۱ \Rightarrow ۰/۹۹۰۹x = ۱۳۷۱۴۲۸/۲ \Rightarrow x = ۱۳۸۴۰۲۲/۸\ km$$

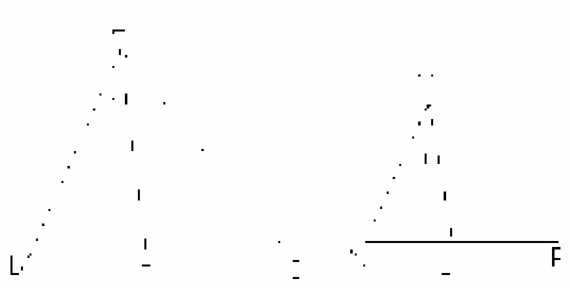
۱- الف)

$$\left.\begin{matrix}\hat{F}=\hat{C}=۴۵^{\circ}\\ \hat{E}=\hat{B}=۲۰^{\circ}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \Delta FDE \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{DF}{AC}=\frac{DR}{AP}\Rightarrow$$

$$\frac{۶\sqrt{۲}}{AC}=\frac{۶}{۲}\Rightarrow AC=\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۶}\Rightarrow AC=۲\sqrt{۲}$$

ب) $\frac{DR}{AP}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow \frac{DR}{۴}=\frac{۲۱}{۱۵}\Rightarrow DR=\frac{۴\times ۲۱}{۱۵}=\frac{۲۸}{۵}=۵/۶$

۲- $\Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow \frac{AD}{MD'}=\frac{AB}{MN}$



MD' , AD نیمساز

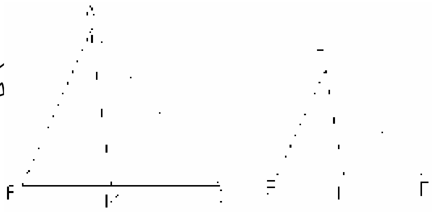
اثبات)

$$\Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow \hat{B}=\hat{N}\ ,\ \hat{A}=\hat{M}\Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲}=\frac{\hat{M}}{۲}\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{M}_۱$$

$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{M}_۱\\ \hat{B}=\hat{N}\end{cases}\Rightarrow$ حالت دو زاویه $\Delta ABD \sim \Delta MND' \Rightarrow \frac{AD}{MD'}=\frac{AB}{MN}$

۳- $\Delta ABD \sim \Delta EFG \Rightarrow \frac{BC}{FH}=\frac{AD}{EG}\Rightarrow \frac{x}{x-۳}=\frac{۲۴}{۱۸}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۴x-۱۲=۳x\Rightarrow x=۱۲$

۴- فرض AM , DN , $\Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow \frac{AM}{DN}=\frac{AB}{DE}$ حکم



$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow \hat{B}=\hat{E}\ ,\ \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{BC\div ۲}{EF\div ۲}\Rightarrow \frac{AB}{DE}=\frac{BM}{EN}\ ,\ \hat{B}=\hat{E}\Rightarrow$$

دو ضلع متناسب وزاویه بین مساوی $\Delta ABM \sim \Delta DEN \Rightarrow \frac{AB}{DE}=\frac{AM}{DN}$

۵- $\Delta DEF \sim \Delta GHI \Rightarrow \frac{GK}{DJ}=\frac{HI}{EF}\Rightarrow \frac{۳}{۲}=\frac{۲۰}{EF}\Rightarrow EF=\frac{۴۰}{۳}\approx ۱۳/۳$

۱- $\frac{S}{S'}=\left(\frac{۶}{۵}\right)^{۲}=\frac{۳۶}{۲۵}$

۲- $\frac{AB}{A'B'}=K \quad , \quad \frac{S}{S'}=K^{۲}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow K=\frac{۴}{۵}=\frac{AB}{A'B'}$

۳- $\frac{S}{S'}=۱۱=K^{۲}\Rightarrow K=\sqrt{۱۱}\Rightarrow \frac{a}{۷}=\sqrt{۱۱}\Rightarrow a=۷\sqrt{۱۱}$

٤- $\frac{S}{S'}=K^{۲}=\frac{۸۱}{۱۲۱}\Rightarrow K=\frac{۹}{۱۱},\frac{P}{P'}=K\Rightarrow \frac{P}{P'}=\frac{۹}{۱۱}$

٥- $\frac{P}{P'}=\frac{۲۵}{۴۵}=\frac{۵}{۹}=K,\frac{S}{S'}=K^{۲}\Rightarrow \frac{۵۰}{S'}=\left(\frac{۵}{۹}\right)^{۲}\Rightarrow S'=\frac{۵۰\times ۸۱}{۲۵}=۱۶۲$

٦- الف) $\hat{E}_{۱}=\hat{E}_{۲},\hat{A}=\hat{B}\Rightarrow$ دو زاویه $\Delta AEC\sim\Delta BED\Rightarrow \frac{S_{ACE}}{S_{BDE}}=K^{۲}=\left(\frac{۶}{۸}\right)^{۲}=\frac{۹}{۱۶}$

ب) $\frac{AE}{EB}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۴AE=۳EB, AE+EB=۳۵\Rightarrow AE=۱۵, EB=۲۰$

$$\Rightarrow S_{BDE}=\frac{۱}{۲}BE\times DH=\frac{۱}{۲}\times ۲۰\times ۸=۸۰$$

۷- $EF\parallel BC\Rightarrow \hat{E}=\hat{B},\hat{A}=\hat{A}\Rightarrow$ حالت دوزاویه $\Delta AEF\sim\Delta ABC$

$\Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۶}=K^{۲}\Rightarrow K=\sqrt{\frac{۱}{۶}}$ و $\frac{AH'}{AH}=K=\sqrt{\frac{۱}{۶}}$

۸- $\frac{a}{a'}=\frac{P}{P'}\Rightarrow \frac{۵}{a'}=\frac{۵+۸+۱۱}{۶۰}=\frac{۲۴}{۶۰}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow a'=\frac{۲۵}{۲}=۱۲/۵$

$\frac{۸}{b'}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow b'=\frac{۴۰}{۲}=۲۰ \quad , \quad \frac{۱۱}{c'}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow c'=\frac{۵۵}{۲}=۲۷/۵$

۹- $(۱۴,۹,۷) \approx (۲۱,a,b) \Rightarrow \frac{۱۴}{۲۱} = \frac{۹}{a} = \frac{۷}{b} \Rightarrow a = \frac{۹\times۲۱}{۱۴} = ۱۳/۵ \ , \ b = \frac{۲۱\times۷}{۱۴} = ۱۰/۵$

$\Rightarrow P = a + b + ۲۱ = ۱۳/۵ + ۱۰/۵ + ۲۱ = ۴۵$

۱۰- $\frac{s}{s'} = k^{۲}, k = \frac{۱۴}{۷} = ۲ \Rightarrow \frac{s}{s'} = ۲^{۲} = ۴$

۱۱- $S_{ABC} = S_{ABH} + S_{ACH} \Rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = ۱ \ , \hat{B} = \hat{B} \ , \ \hat{H} = \hat{A}$

$\Rightarrow \Delta ABH \sim \Delta ABC \Rightarrow \left(\frac{AB}{BC}\right)^{۲} + \left(\frac{AC}{BC}\right)^{۲} = ۱ \Rightarrow AB^{۲} + AC^{۲} = BC$

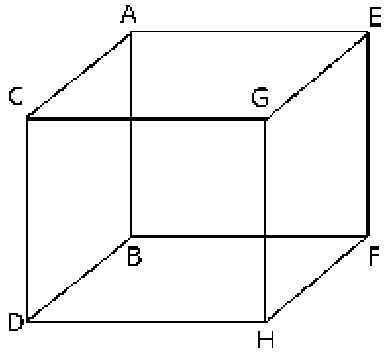
۱) بنابر اصل ۲ مساحت

۲) رابطه ۱ رابر مساحت مثلث ABC تقسیم می کنیم.

۳) دو مثلث ACH , ABH با مثلث ABC به حالت دو زاویه متشابهند.

٤) نسبت مساحتها با مربع نسبت اضلاع برابر است .

٥) دو طرف تساوی ٤ را در $BC^{۲}$ ضرب می کنیم.



۱- $AB\ ,\ CD\ ,\ EF\ ,\ GH$ بر دو صفحه $BDHF\ ,\ ACGE$ عمودند ،
$DH\ ,\ BF\ ,\ CG\ ,\ AE$ بر دو صفحه $ACDB\ ,\ GEFH$ عمودند ،
$AC\ ,\ EG\ ,\ FH\ ,\ BD$ بر دو صفحه $CGHD\ ,\ AEFB$ عمودند.
و ۲۴ زاویه قائمه تشکیل می شود که عبارتند از

$CAE\ ,\ \angle CAB\ ,\ \angle EAB\ ,\ \angle CDB\ ,\ \angle HDB\ ,\ \angle CDH\ ,\ \ldots$

۲- الف) خط بر تمام خطوط صفحه عمود است .

ب) $\angle FOL\ ,\ \angle FOR\ ,\ \angle FOP\ ,\ \angle DOR\ ,\ \angle DOL\ ,\ \angle DOP\ ,\ \ldots$

۳- $$\left.\begin{array}{c} TX = TX \\ \angle TXA = \angle TXE = ۹۰^{\circ} \\ TE = TA \end{array}\right\}$$ وتر و یک ضلع $\Rightarrow \Delta TEX \cong \Delta TAX \Rightarrow \angle TEX = \angle TAX$

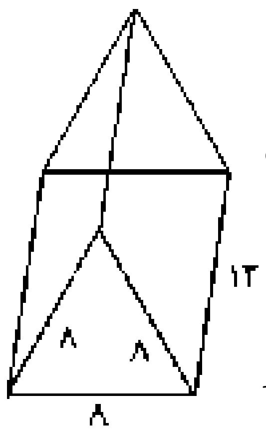
۴- $$V = (\sqrt{۲} \times \sqrt{۳})\sqrt{۵} = \sqrt{۳۰}$$

۵- $$a\sqrt{۳} = \sqrt{۶} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۲}\ ,\ S = ۶a^{۲} = ۶(\sqrt{۲})^{۲} = ۱۲$$

۱- الف) $JK^{۲} = JN^{۲} + NK^{۲} = ۶^{۲} + ۶^{۲} = ۷۲ \Rightarrow JK = \sqrt{۷۲} = ۶\sqrt{۲}$

ب) $HN = a\sqrt{۳} = ۶\sqrt{۳}$

۲- $a\sqrt{۲} = ۱۰ \Rightarrow a = \frac{۱۰}{\sqrt{۲}} \Rightarrow a = ۵\sqrt{۲} \Rightarrow S = ۶a^{۲} = ۶\left(۵\sqrt{۲}\right)^{۲} = ۶(۵۰) = ۳۰۰$



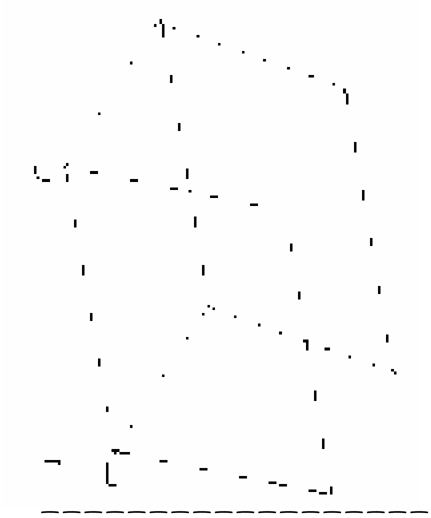
۳- مساحت جانبی$S_۱ = ۳(۸ \times ۱۲) = ۳(۹۶) = ۲۸۸$

مساحت کل=مساحت جانبی+مساحت دو قاعده$= ۲۸۸ + ۲(\frac{\sqrt{۳}}{۴})(۸)^{۲} = ۲۸۸ + ۳۲\sqrt{۳}$

۴- مساحت قاعده$= \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(۱۰)^{۲} = ۱۵۰\sqrt{۳}$

مساحت جانبی$= ۶(ah) = ۶(۱۰ \times ۸) = ۱۰۸۰$

مساحت کل=مساحت جانبی+مساحت دو قاعده$= ۱۰۸۰ + ۲\left(۱۵۰\sqrt{۳}\right) = ۱۰۸۰ + ۳۰۰\sqrt{۳}$

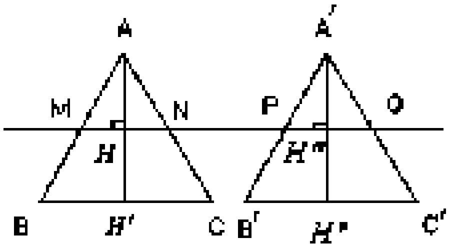


۵- در هر مثلث قائمه الزاویه مانند ABC طول ارتفاع از وتر مثلث کوتاهتر است یعنی $AC < BC$ پس ارتفاع از یال منشور کوتاهتر است .

$(AC^{۲} + AB^{۲} = BC^{۲} \Rightarrow AC^{۲} < BC^{۲} \Rightarrow AC < BC)$

۱- ثابت می کنیم اگر BC و $B'C'$ برابر بوده و MQ موازی BC رسم شود آنگاه $MN = PQ$

$$MN \| BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{MN}{BC}=\frac{AH}{AH'}$$ همینطور $$\frac{PQ}{B'C'}=\frac{A'H'''}{A'H''}$$



ولی دو مثلث ΔABC , $\Delta A'B'C'$ دارای ارتفاعهای برابر

وقاعده های برابر اند پس $MN = PQ$ بنابراین

طبق اصل کاوالیری دومثلث مساحت برابر دارند.

۲- الف) $V = ۱۰ \times ۷ = ۷۰$ ب) $V_B = V_A = ۷۰$

۳- الف) قاعده $S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴^۲\sqrt{۳}}{۴} = ۴\sqrt{۳}$ ، وجه جانبی $S = ۴ \times ۴ = ۱۶$

ب) چون منشور قائم است ارتفاع و یال با هم برابر ۴ است

پ) $V = S.h = ۴\sqrt{۳} \times ۴ = ۱۶\sqrt{۳}$

۴- الف) $S_۱ = ۲\pi r_۱ h_۱ = ۲\pi(۲)(۱) = ۴\pi$, $S_۲ = ۲\pi r_۲ h_۲ = ۲\pi(۱)(۲) = ۴\pi \Rightarrow S_۱ = S_۲$

ب) $V_۱ = \pi r_۱^۲ h_۱ = \pi(۲)^۲(۱) = ۴\pi$, $V_۲ = \pi r_۲^۲ h_۲ = \pi(۱)^۲(۲) = ۲\pi \Rightarrow V_۱ = ۲V_۲$

۵- الف) کل$S = ۲\pi r(r+h) = ۲\pi(۵)(۵+۱۶) = ۱۰\pi(۲۱) = ۲۱۰\pi$

$$V = \pi r^۲ h = \pi(۵)^۲(۱۶) = ۴۰۰\pi$$

ب) $V' - V = (۱۰ \times ۱۰ \times ۱۶) - ۴۰۰\pi = ۱۶۰۰ - ۴۰۰\pi$

۶- الف) $\frac{S_۲}{S_۱} = \frac{۲\pi r_۲ h_۲}{۲\pi r_۱ h_۱} = \frac{۲h}{۱h} = ۲$

ب) $\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{\pi r_۲^۲ h_۲}{\pi r_۱^۲ h_۱} = \frac{۴h}{h} = ۴$

پ) فضای بین دو استوانه $= V_۲ - V_۱ = ۴\pi h - \pi h = ۳\pi h$

۱- الف) سایه زده شده $V = ۲(\frac{۱}{۳}\pi(۴)^{۲}(۱۰)) = \frac{۳۲۰}{۳}\pi$

ب) $V = \pi(۴)^{۲}(۲۰) - ۲(\frac{۱}{۳}\pi(۴)^{۲}(۱۰)) = ۳۲۰\pi - \frac{۳۲۰}{۳}\pi = \frac{۶۴۰}{۳}\pi$

۲- الف) $V = \frac{۱}{۳}\pi a^{۲}b$ ب) $V = \frac{۱}{۳}\pi(a)^{۲}(۲b) = \frac{۲}{۳}\pi a^{۲}b$

پ) $V = \frac{۱}{۳}\pi(۲a)^{۲}b = \frac{۴}{۳}\pi a^{۲}b$ ت) $V = \frac{۱}{۳}\pi(۲a)^{۲}(۲b) = \frac{۸}{۳}\pi a^{۲}b$

۳- الف) $\frac{V'}{V} = \frac{\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}(۲h)}{\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h} = ۲ \Rightarrow V' = ۲V$ ب) $\frac{V'}{V} = \frac{\frac{۱}{۳}\pi(۲r)^{۲}h}{\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h} = ۴$

۴- $(\frac{a}{۲})^{۲} + h^{۲} = h'^{۲}$ و

الف) $(\frac{۱۴}{۲})^{۲} + h^{۲} = ۲۵^{۲} \Rightarrow h^{۲} = ۶۲۵ - ۴۹ = ۵۷۶ \Rightarrow h = ۲۴$,

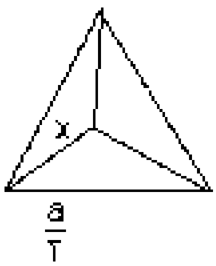
$, V = \frac{۱}{۳}a^{۲}h \Rightarrow V = \frac{۱}{۳}(۱۴)^{۲}(۲۴) = ۱۵۶۸$

ب) $(\frac{a}{۲})^{۲} + ۶^{۲} = ۶/۵^{۲} \Rightarrow \frac{a^{۲}}{۴} = ۶/۲۵ \Rightarrow a^{۲} = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$

$, V = \frac{۱}{۳}a^{۲}h = \frac{۱}{۳}(۵)^{۲}(۶) = ۵۰$

پ) $V = \frac{۱}{۳}a^{۲}h = \frac{۱}{۳}(۱)^{۲}(۱/۳) = ۰/۴۳$

۵-



$\cos ۳۰ = \frac{\frac{a}{۲}}{x} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{۳}}$, $h^{۲} + x^{۲} = a^{۲} \Rightarrow$

$h^{۲} = a^{۲} - \frac{a^{۲}}{۳} = \frac{۲a^{۲}}{۳} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{۲}{۳}}a$, $V = \frac{۱}{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲})(\sqrt{\frac{۲}{۳}}a) = \frac{\sqrt{۲}}{۱۲}a^{۳}$

$if \quad a = ۴/۵ \Rightarrow V = \frac{\sqrt{۲}}{۱۲}(۴/۵)$

۱- الف) $S_۱ = ۴\pi(۱)^۲ = ۴\pi \;,\; S_۲ = ۴\pi(۲)^۲ = ۱۶\pi$

ب) $V_۱ = \frac{۴}{۳}\pi(۱)^۳ = \frac{۴}{۳}\pi \;,\; V_۲ = \frac{۴}{۳}\pi(۲)^۳ = \frac{۳۲}{۳}\pi$

پ) $\frac{S'}{S} = \frac{۴\pi(۲r)^۲}{۴\pi(r)^۲} = ۴ \Rightarrow S' = ۴S$

ت) $\frac{V'}{V} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi(۲r)^۳}{\frac{۴}{۳}\pi(r)^۳} = ۸ \Rightarrow V' = ۸V$

۲- الف) $V = \frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۳}\pi r^۳) = \frac{۲}{۳}\pi r^۳$ ب) $S = \frac{۱}{۲}(۴\pi r^۲) = ۲\pi r$

پ) مساحت کل $S = ۲\pi r^۲ + \pi r^۲ = ۳\pi r$

۳- الف) $S = ۴\pi(۶۴۰۰)^۲$ ب) $V = \frac{۴}{۳}\pi(۶۴۰۰)$

٤- الف) $S = ۴\pi r^۲ = ۳۶\pi \Rightarrow r^۲ = ۹ \Rightarrow r = ۳$ ب) $V = \frac{۴}{۳}\pi(۳)^۳ = ۳۶\pi$
